EL NÚMERO REAL A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Lyda Constanza Mora Mendieta
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Profesoras Universidad Pedagógica Nacional

La estructura formal del número real, como la conocemos en la actualidad, es resultado de un proceso evolutivo a través de diferentes conflictos y aproximaciones ocurridos durante un periodo de más de 2000 años y en el marco de variadas civilizaciones y culturas. Realizaremos en este escrito un seguimiento historiográfico del número real con el fin de analizar su evolución y desarrollo.

Estimamos importante realizar este estudio por cuanto un seguimiento historiográfico de un concepto matemático permite conocer y profundizar en los procesos (individuales y sociales) que se dieron para la construcción de cierta noción, lo cual es de mucha ayuda cuando se realiza un análisis conceptual. En este sentido, dicho seguimiento suministra información respecto a la evolución del concepto, las etapas y los puntos cruciales en su desarrollo, caracterizadas en términos de situaciones, representaciones y personajes que aportaron a su consolidación, dando origen a diversas concepciones –en este caso, del número real– de acuerdo con cada momento histórico, los intereses, preocupaciones y saberes de la comunidad matemática en cada uno de ellos.

En un primer momento estudiaremos el desarrollo histórico del concepto de número real, con base en el estudio realizado por Isabel Romero (1997) en su tesis doctoral y complementado con libros de historia de las matemáticas, como Kline (1972), Boyer (1986), Bell (1999) y Smith (1958). Es importante señalar aquí que, el seguimiento historiográfico que realizaremos, salvo en la formalización del concepto de número real (etapa cuatro), corresponde únicamente al número real positivo; la aceptación y evolución de los números negativos constituye otra historia, que no abordaremos en este trabajo.

Posteriormente, realizaremos una interpretación de tal historia, en la cual incluiremos dos aspectos: el estatus matemático del concepto de número real de acuerdo con la teoría de Chevallard acerca de las nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas y la descripción de las concepciones más representativas asociadas a la evolución histórica de este concepto, desde la perspectiva teórica de Sfard, por lo cual señalaremos, para cada concepción, el momento histórico, las situaciones y representaciones asociadas al concepto, además de su caracterización como estructural u operativa.

1. ESTUDIO HISTÓRICO DEL NÚMERO REAL.

Consideraremos el conjunto de los números reales positivos como aquel conformado por el conjunto de los números racionales y el de los números irracionales, ambos positivos; el primero, a su vez, incluye el conjunto de los números naturales[1]; por lo cual, al estudiar la historia de los números reales se debe tratar la historia de estos conjuntos numéricos.

La historia de los números naturales es la más antigua, en cuanto a sistemas numéricos se refiere, data de muchos siglos atrás, al parecer desde que el hombre comienza a representar con marcas en troncos de árboles o huesos de animales objetos que cuenta, nace la idea de número natural, idea que se va desarrollando, de manera más o menos especializada, según las necesidades y dominio intelectual de cada cultura.

Varios son los sistemas de notación conocidos para los números naturales; los más sencillos son de tipo aditivo, el ejemplo más conocido es el sistema de los egipcios, basado en la secuencia 1, 10, 100, 1000, 10000 y 1000000, con la cual representaban todos los números que requerían colocando tantas potencias de 10 y unidades, seguidas unas de otras

[1] En sentido estricto, sabemos que estos conjuntos numéricos no son subconjuntos del conjunto de los números reales, sino isomorfos con algunos subconjuntos de éste; sin embargo, omitiremos esta precisión porque no es relevante para este trabajo.

en orden descendente, como fuera necesario. Para ello a cada potencia de 10, incluido el número 1, asignaron un símbolo específico, uno en notación jeroglífica y otro en hierática. En la figura 1 se halla representado en notación jeroglífica el número 1274351. Otro sistema de notación popular es el romano, basado en la adición y en la sustracción de acuerdo a posición de ciertos símbolos respecto a otros.

Figura 1

Por último están los sistemas de tipo posicional, que muestran un mayor grado de desarrollo en las culturas que los originaron, como el babilónico, el maya, el chino-japonés y el hindú-árabe. De acuerdo al alcance de cada sistema, diferentes culturas idearon formas para hacer operaciones; por ejemplo, los egipcios idearon algoritmos para multiplicar y dividir, al igual que los babilonios, mientras que de los romanos no son conocidos algoritmos para realizar adiciones o multiplicaciones, pues su sistema posee dificultades para ello.

Los números naturales fueron los preferidos por varias culturas durante largo tiempo, incluso se evadía el uso de otros números, a veces, no sólo por cuestiones prácticas sino ontológicas como ocurrió con los griegos; sin embargo, su formalización sólo ocurrió hasta el siglo XIX, en 1881, con la primera axiomatización publicada de los números naturales debida Charles Sanders Peirce, no tan célebre como la de Giusseppe Peano en 1889[2].

Respecto a la evolución histórica de los números racionales, inicia con el uso de las fracciones sexagesimales o unitarias; las primeras creadas por los babilonios, las segundas

[2] Para mayor información al respecto, consultar las Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y I de Aritmética (Universidad Pedagógica Nacional, 2002) cuyo tema central fue El Concepto de Número Natural.

por los egipcios, las cuales fueron las más utilizadas hasta el siglo XVI[3]. Los números racionales se formalizan debido a la necesidad de fundamentar matemáticamente a los números reales.

El conjunto de los números reales, como un objeto matemático, se consolida sólo cuando logran definirse los números irracionales, pues son éstos los que le dan el carácter de completez. Dicha completez, llamada también continuidad, por Dedekind o Cantor, es esencial para la construcción de, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales o la teoría de la medida.

Aunque con los números racionales basta para expresar cuestiones experimentales, con ellos es posible representar cualquier medida física, parecerían innecesarios los números irracionales –si a cuestiones de necesidades prácticas se redujeran las matemáticas–; sin embargo, la predicción de ciertos comportamientos físicos, biológicos, económicos, sociológicos, etc. se hace mediante ecuaciones diferenciales, éstas describen los rasgos de la vida: crecimiento, desarrollo y decadencia y éstas, al ser ecuaciones que implican una o más derivadas, requieren de la continuidad, en suma, de la completez de los números reales. Por otra parte, la teoría de integración se fundamenta en la teoría de la medida y ésta a su vez, en los números reales; sin embargo, el conjunto de los números racionales no aporta a la medida de un conjunto pues, por ser numerable, tiene medida cero; esto significa que dos conjuntos que difieran entre sí por un conjunto numerable tienen la misma medida, de manera que los números que generan alguna medida son los números irracionales.

Los números irracionales, además, constituyen la mayor dificultad para caracterizar las operaciones, ya que su comportamiento es sustancialmente diferente al de los otros números; por ejemplo, al multiplicar dos números irracionales, el resultado no necesariamente es un número irracional. Debido a esto, el énfasis en este estudio histórico del número real se encuentra, fundamentalmente, alrededor de los números irracionales, por cuanto constituyen el punto álgido en la aceptación y teorización de los reales, como números.

[3] Este tema se tratará, con un poco más de detalle, en el apartado 1.2. de este capítulo.

En el desarrollo histórico del concepto de número real, se pueden señalar, de manera diferenciada, cuatro etapas claves, de acuerdo con los problemas, representaciones, preguntas y avances más significativos de cada momento. A continuación describiremos cada una de estas etapas, teniendo en cuenta el orden cronológico, la evolución conceptual y las culturas y personajes más representativos.

1.1. PRIMERA ETAPA: Descubrimiento de la inconmensurabilidad (irracionalidad).

Los antiguos habitantes de la llanura mesopotámica, entre los ríos Tigris y Eufrates, desarrollaron una civilización con grandes adelantos a nivel científico, especialmente en lo que a matemáticas se refiere. Todo lo que se conoce de la matemática babilónica, ha llegado a nosotros en unas 400 tablillas de arcilla, encontradas a finales del siglo XIX en las ruinas de Mesopotamia y que datan del año 2000 a.C. aproximadamente, las cuales revelan el desarrollo de un sistema de numeración sexagesimal y algunas ideas de aritmética, álgebra y geometría, aplicadas en la solución de problemas que para ellos eran cotidianos (astronomía, comercio, construcción, repartos, entre otros).

Al igual que en otras civilizaciones antiguas, el principal interés de los babilonios era la astronomía, específicamente la realización de cálculos que les permitiera predecir el comportamiento de los astros, para lo cual construyeron varias tablas que les facilitara la realización de operaciones aritméticas con su sistema sexagesimal; así, la aritmética babilónica estuvo al servicio de la astronomía, más aún, fue la que impulsó su desarrollo. Un ejemplo notable de esto es la construcción del calendario, en el que es evidente el uso de los resultados de sus trabajos en aritmética, en particular el manejo de su sistema de numeración.

Los babilonios poseían tablas de productos, inversos, cuadrados, cubos, potencias sucesivas de algunos números y raíces cuadradas y cúbicas. En estas últimas tablas, se daban valores exactos si la raíz era un número natural y aproximaciones sexagesimales en los demás casos, como señala Kline (1972): *"lo más plausible es que creyeran que los irracionales* *también se podían expresar de manera exacta en forma sexagesimal, prolongando la expresión hasta donde fuera necesario".*

De esta manera, obtuvieron el valor 1,414213 para $\sqrt{2}$. Pero, los babilonios trabajaron con aproximaciones de algunos irracionales cuadráticos sin tener conciencia del carácter diferente de estos números; sólo hasta el siglo VI a.C., en el marco de la matemática griega, se empezó a vislumbrar la necesidad de otras entidades numéricas con la aparición de las magnitudes inconmensurables.

1.1.1. El Número en la Escuela Pitagórica. Aparición de Segmentos Inconmensurables.

Pitágoras (569 a.C. – 500 a.C. aprox.) es, sin lugar a dudas, uno de los personajes más sobresalientes en el ámbito de la matemática griega, no sólo por estar entre los primeros, cronológicamente hablando, sino además por su influencia dominante en el pensamiento matemático de la antigüedad. Originario de Samos, estableció su escuela en Crotona, donde se instaló desde el año 529 a.C., después de viajar por Egipto, Babilonia y, probablemente, la India; viajes en los que obtuvo amplios conocimientos en matemáticas.

Con sus discípulos constituyó una sociedad o una especie de hermandad religiosa en la que todos sus integrantes compartían las mismas creencias, costumbres e investigaciones y se comprometían con un pacto de silencio que no les permitía revelar los secretos y descubrimientos de la comunidad. Puede ser ésta una de las razones por las cuales muchos aspectos sobre la escuela, y el mismo Pitágoras, permanecen en la incertidumbre. Los pitagóricos hicieron grandes progresos en matemáticas, como señala Aristóteles "*los llamados pitagóricos se dedicaron por de pronto, e hicieron progresar esta ciencia. Embebidos en este estudio creyeron que los principios de las matemáticas eran los principios de todos los seres*" (Aristóteles, 350 a. C. aprox., p. 25).

Pitágoras descubrió las progresiones armónicas de las notas musicales, hallando la relación entre la longitud de una cuerda y el tono de la nota producida por la vibración; este hecho lo motivó a plantear que los números eran el elemento de todas las cosas, la materia prima de la que está hecha la realidad y de ahí, la principal consigna de su escuela "*Todo es número*"; en palabras de Aristóteles,

> *Por último, veían en los números las combinaciones de la música y sus acordes. Pareciéndoles que estaban formadas todas las cosas a semejanza de los números, y siendo por otra parte los números anteriores a todas las cosas, creyeron que los elementos de los números son los elementos de todos los seres, y que el cielo en su conjunto es una armonía y un número.* (Ibid., p. 26).

Los pitagóricos, concebían los números como una especie de átomos, con existencia propia, y que relacionados entre sí constituían el mundo real, además del carácter y propiedades místicas atribuidas a ellos. El número estaba compuesto de unidades colocadas de acuerdo con cierta composición espacial determinada; así, se generan las líneas por yuxtaposición de unidades (puntos[4]), las superficies por yuxtaposición de líneas y el espacio por yuxtaposición de superficies[5]. Con estos elementos se componen todos los cuerpos del universo, razón por la cual deben ser considerados como números.

De esta forma, el número, tal como lo consideraban los pitagóricos, era una arquitectura discontinua de unidades–puntos (mónadas), indivisibles, reales, constitutivas del ser mismo de las cosas. Según Nicómaco, pitagórico tardío del primer siglo de nuestra era y una de nuestras fuentes más precisas de la aritmética pitagórica, el número es "*un agregado compuesto de unidades*" (Ibid., p. 39), con lo cual, sólo los números naturales tienen sentido en la teoría pitagórica; las fracciones, entonces, no eran consideradas números[6].

Este hecho es importante en la medida que llevó a conclusiones falsas, al llevarlo al ámbito de la geometría; en particular la idea según la cual todas las razones entre cantidades geométricas (longitudes o segmentos) podían expresarse mediante razones entre números naturales, lo cual se traduce en encontrar una medida común para dos longitudes cualesquiera, en cuyo caso dichas longitudes se dicen conmensurables: "*Dadas dos*

---

[4] Se supone que los pitagóricos no distinguían los números de los puntos; de hecho, representaban los números mediante puntos distribuidos en formas geométricas, dando origen a los números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

[5] Los pitagóricos identificaron el punto con el uno, la línea con el dos, la superficie con el tres y el volumen con el cuatro.

[6] En el comercio se utilizaron las fracciones, pero los usos comerciales de la aritmética quedaban fuera del marco de la matemática griega propiamente dicha (Kline, op. cit., 1972)

magnitudes AB y AC, se trata de buscar una unidad de longitud AD, común a ambas, de tal manera que AB se pueda expresar como un número a entero de veces AD y AC se exprese como un número entero b de veces AD, entonces la relación entre AB y AC se puede expresar en términos de una razón $\frac{a}{b}$ *de números enteros"*[7] (Ibid., p. 39).

No obstante, el número que resulta de este proceso de medida, ciertamente no es el número de los pitagóricos. En el primer caso, el número es un múltiplo de la unidad (sentido operatorio) y en el otro caso, es una multiplicidad de unidades (sentido ontológico); además, la unidad-medida, difiere de la unidad-mónada, la primera es continua y la otra es discreta, como lo hará notar Aristóteles años después (ver sección 3.1.1.3.).

Pero, realmente esta última anotación no constituyó un problema para las teorías pitagóricas respecto al número como esencia de todas las cosas; el verdadero problema, que los sorprendió desagradablemente, fue el descubrimiento de segmentos inconmensurables; es decir, razones entre longitudes que no podían expresarse con números naturales; descubrimiento que prácticamente demolía las bases del credo pitagórico, por cuanto los números naturales y sus razones resultaban inadecuados o insuficientes para expresar ciertas relaciones geométricas entre segmentos, precisamente porque éstos no son colecciones discretas de unidades, como ellos lo pensaban.

No existe certeza respecto al momento y a la situación que dio lugar a este hallazgo. Las teorías apuntan a que fueron los pitagóricos tardíos (finales del siglo V a.C.) quienes descubrieron las razones inconmensurables, específicamente Hipaso de Metaponto; incluso, hay una leyenda que señala que *"los pitagóricos se encontraban navegando en el mar en esa época y que lanzaron a Hipaso por la borda como castigo por haber introducido en el*

[7] Para obtener esta unidad común, se suele emplear el algoritmo de Euclides que consiste en, dadas dos magnitudes a y b, suponemos que b es el mayor de los dos segmentos, si existe una medida común entre a y b, colocamos a a desde un extremo y a lo largo de b tantas veces como sea posible, sin que sobrepasemos la longitud de b; es decir, dividimos b entre a; si las longitudes coinciden entonces a es la medida común. Si en el proceso queda un residuo, digamos r_1, este residuo debe ser conmensurable con a, para que a y b sean conmensurables; entonces repetimos el proceso anterior con r_1 y a, si el residuo es 0, entonces r_1 es la medida común; si no, obtenemos un residuo r_2, y así sucesivamente hasta obtener un residuo 0. El penúltimo residuo es la máxima medida común. (Luque, et al. 2004)

universo un elemento que negaba la teoría pitagórica de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones" (Kline, op. cit., p. 58).

En cuanto a las circunstancias que determinaron el reconocimiento de la existencia de longitudes inconmensurables, hay dos hipótesis. Por una parte, al considerar un segmento *a* dividido en media y extrema razón[8], generando los segmentos *b* y *c*, se puede verificar que dichos segmentos no son conmensurables, pues al aplicar el algoritmo de Euclides[9], se da lugar a un proceso infinito que nunca permite hallar la medida común deseada; esta situación se presenta en la estrella pentagonal, símbolo de la hermandad pitagórica, pues las cinco líneas que la conforman, se encuentran divididas en media y extrema razón.

La otra hipótesis está relacionada con la aplicación del teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles o la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal, situación en la que el algoritmo de Euclides, también genera un proceso infinito. Según Aristóteles, los pitagóricos procedieron con el método de reducción al absurdo para demostrar la inconmensurabilidad de estos segmentos; dicha demostración puede reconstruirse, en términos actuales, como sigue:

> *Si la razón de la diagonal al lado es conmensurable, supongamos que sea p: q, donde p y q son números enteros primos entre sí. Entonces p y q simbolizan el número de subdivisiones iguales en el lado y la diagonal del cuadrado respectivamente. Pero, puesto que el cuadrado de la diagonal es el doble que el del lado, se sigue que* $p^2 = 2q^2$*. Luego* p^2 *es un número par, y p también debe ser par. Por tanto, puede considerarse a p como 2r, siendo* $p^2=4r^2$*, y, por consiguiente,* $q^2 = 2r^2$*. Esto exige que q sea par; lo cual es imposible porque dos números p y q primos entre sí no pueden ser ambos pares. Así el supuesto originario es insostenible; no puede existir ninguna medida común y la razón es, por tanto, irracional* (Newman, 1997, p. 17).

En todo caso, la revelación de la existencia de longitudes inconmensurables, haya sido con $\sqrt{5}$ o $\sqrt{2}$, echó por tierra los planteamientos pitagóricos respecto a la posibilidad de expresar los fenómenos del universo mediante números (naturales) y de paso, la fe de los

---

[8] La división en media y extrema razón también se conoce división áurea, con ésta un segmento queda dividido en dos partes desiguales tales que el segmento es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor.

[9] Ver nota 7 de este capítulo.

matemáticos griegos en esta teoría. La palabra αλογοζ (*alogos*: *a* = sin, *logos* = razón), con la cual se designaron las razones entre segmentos inconmensurables, puede ser entendida en dos sentidos: o como razón no expresable en términos de números naturales o como algo que pone en peligro la coherencia del discurso; de ahí el uso actual de la palabra irracional para denominar estas razones. Matemáticos posteriores como Zenón de Elea y Eudoxo, buscaron explicaciones y soluciones racionales para el asunto de la inconmensurabilidad revelada por los pitagóricos.

1.1.2. Escuela Eleática. Continuo vs. Discreto.

Una de las preocupaciones de los científicos griegos, a raíz del descubrimiento de los segmentos inconmensurables, fue la búsqueda de justificaciones para los problemas relacionados con el establecimiento de la relación entre lo continuo y lo discreto, es decir: *(a)* l*a prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común;(b) lo indefinidamente pequeña de la última; (c) que ésta debe estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan* (Romero, op. cit., p. 42).

Cantidades como el tiempo, la longitud, el área, el volumen, entre otras, son continuas y por tanto, la idea de considerar todo como colecciones discretas de unidades llevaba a conflictos, en particular a la aparición de las longitudes inconmensurables; pero esto sólo se puso en evidencia con la obra de Zenón de Elea (nacido entre el 495 y 480 a.C.), filósofo fundador de la escuela eleática.

Zenón propuso un cierto número de paradojas, las más famosas relacionadas con el movimiento[10], con la cuales se puso de manifiesto el problema con las cantidades discretas para describir el universo. No se conocen con certeza las exposiciones exactas de Zenón; los datos que poseemos son con base en citas de Aristóteles acerca de él:

[10] Las paradojas del movimiento de Zenón son cuatro, distintas entre sí, pero unificadoras al considerarlas en bloque. Las dos primeras atacan la idea de que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo y "liso"; las otras dos atacan la idea que el espacio y el tiempo están formados por intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos. La primera paradoja de cada caso considera el movimiento de un único cuerpo y la segunda, el movimiento relativo de un cuerpo respecto al otro (Kline, 1972)

Supongamos que la realidad consta de unidades. Estas unidades, o tienen magnitud o no la tienen. En el primer caso, consideremos por ejemplo una línea como formada por unidades de magnitud: esta línea será infinitamente divisible, puesto que, por más que se la divida sus unidades seguirán teniendo magnitud y, por tanto, seguirán siendo divisibles. Más, en tal caso, la línea constará de un número de unidades infinito, y cada una de esas unidades estará dotada de magnitud. Así pues, esa línea tendría que ser infinitamente grande, como compuesta de un número infinito de partes extensas. Por consiguiente, todas las cosas del mundo habrán de ser infinitamente grandes, y el mundo habrá de ser infinitamente grande. Supongamos por el contrario que las unidades elementales carecen de magnitud. En este caso, también el universo entero carecerá e magnitud, ya que, por más unidades que añadamos y juntemos, si ninguna de ellas tiene magnitud, tampoco la reunión de todas ellas tendrá magnitud alguna. Mas si el universo carece en absoluto de magnitud, ha de ser infinitamente pequeño, y todas las cosas del universo habrán de ser infinitamente pequeñas (Simplicio, citado por Kiri y Raven). Se plantea así el siguiente dilema: o todas las cosas del mundo son infinitamente grandes o bien cada una de ellas es infinitamente pequeña. La conclusión que Zenón quiere que saquemos de este argumento es, naturalmente, que la suposición de donde deriva semejante dilema es absurda, a saber, la de que el universo y todas las cosas que hay en él están compuestas de unidades (Ibid., p. 43).

Los planteamientos de Zenón llevaron a la conclusión de la imposibilidad de hacer coincidir la pluralidad discontinua y la pluralidad de puntos de los pitagóricos, con la realidad concreta y continua del mundo sensible. Se hace necesario, entonces, incluir nuevos métodos y elementos para abordar adecuadamente el asunto de lo infinitamente pequeño. El primer paso en esta dirección lo dio Eudoxo con su método de exhaución.

1.1.3. Escuela Platónica. Primera Teoría sobre los Irracionales.

Hacia el año 387 a.C., Platón fundó su Academia en Atenas. Consideró a la matemática como fundamental para entender el universo y estudiar filosofía; es probable que por esta razón, varios de los grandes matemáticos griegos como Eudoxo, Teeteto, Menecmo, Dinostrato, entre otros, fueran inicialmente sus discípulos.

Platón consideraba que los objetos de la matemática, números y figuras geométricas, son independientes de la realidad y no tienen en sí nada material, pues son distintos de los objetos físicos. De hecho, Platón distingue entre número numerado y número aritmético; el primero, útil contar y el segundo, un ente ideal de naturaleza abstracta, formado por la agrupación de unidades iguales; por tanto, los números deben estudiarse simplemente como números en sí mismos y no como entes incorporados a la realidad sensible [11]. De esta manera, fue posible incluir a los irracionales (inconmensurables) como números, por lo menos entre Platón y sus discípulos, como se muestra en algunos de sus escritos. En el dialogo de Platón titulado *El Teeteto*[12], se presenta el trabajo de Teodoro de Cirene, maestro de Platón, y Teeteto, alrededor de los irracionales, en una discusión entre estos dos y Sócrates.

Teodoro (nacido hacia el 470 a.C.), pitagórico nativo del norte de África, estimuló el estudio de la aritmética superior en Atenas y contribuyó al desarrollo de la teoría de longitudes inconmensurables; a él se le atribuye el descubrimiento o, mejor dicho, la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ y $\sqrt{17}$ con la unidad. No se sabe cómo lo hizo, ni tampoco porqué se detuvo en $\sqrt{17}$, aunque es probable que haya seguido las líneas de la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ con la unidad.

Teeteto, por su parte, investigó y clasificó, con base en ciertas propiedades, otros tipos de raíces cuadradas que también son irracionales; por ejemplo, radicales como $\sqrt{3}$ son inconmensurables, con la unidad, en longitud, pero al cuadrado son conmensurables con ella, mientras que radicales como $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, son inconmensurables, con la unidad, en longitud y en cuadrado. Con este trabajo aparecieron otros números irracionales, originados todos como longitudes en construcciones geométricas, estudiados con más detalle en el libro X de los Elementos de Euclides.

Esta aclaración, de que los irracionales surgen como longitudes en construcciones geométricas, se convierte en un obstáculo para aceptar los irracionales como números, por

---

[11] Esta precisión fue sugerida por el profesor Luis Cornelio Recalde.
[12] Teeteto (414 a.C.– 369 a. C.), murió en Atenas de disentería y por las heridas recibidas en una batalla contra los corintios.

cuanto se establece una separación entre la geometría y la aritmética[13]. Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), discípulo de Platón originario de Macedonia y fundador del Liceo, hace la distinción entre magnitud y cantidad, continuo y discreto.

Señala que el número (a los que hoy llamamos números naturales, excepto el cero y el uno[14]) es una pluralidad de unidades, mientras que las longitudes, y demás ideas geométricas, son magnitudes continuas; es decir, que en la aritmética no hay continuo y éste es propio de la geometría; esta concepción se mantiene incluso en Euclides, como se muestra en su obra. De acuerdo con esto, las razones entre longitudes, conmensurables o no, no son números, ni objeto de estudio de la aritmética; aunque las magnitudes conmensurables pueden expresarse mediante números y de alguna manera, pueden asumirse como cantidades. Así, empezó el trabajo con magnitudes inconmensurables, con lo cual se hizo un tratamiento de los irracionales, pero sin asumirlos como números, gracias también a la teoría de las proporciones de Eudoxo.

1.1.4. Escuela de Eudoxo. Teoría de proporciones.

Eudoxo es, sin lugar a dudas, el personaje más sobresaliente en lo que podría llamarse la reforma de las matemáticas. Originario de Cnido (408 a.C. aprox.) y discípulo de Platón, afrontó el problema de las magnitudes inconmensurables, con una nueva teoría de las proporciones, que, de paso, aportaría los elementos necesarios para formalizar los números reales, aunque la sutileza y profundidad de sus planteamientos sólo fue comprendida por Dedekind en el siglo XIX.

Eudoxo introdujo la idea de magnitud continua, diferente de cantidad (número), como ciertas entidades a las que no se les asignaban valores numéricos y que variaban de manera continua y no por saltos, como ocurría con los números (segmentos, áreas, volúmenes,

---

[13] Los pitagóricos, inicialmente, habían identificado aritmética (número) con geometría, pero la aparición en escena de los irracionales generó una distinción en entre estas disciplinas y restringió el estudio de las razones a la geometría, de manera independiente al estudio de los números.
[14] Para Aristóteles el uno y el cero no son números pues no están constituidos por unidades; además, para el caso del cero, existían cuestiones filosóficas que impedían la aceptación del *no ser*. Esta precisión fue sugerida por el profesor Luis Cornelio Recalde.

tiempo, etc.). Definió entonces razón entre magnitudes y proporción, incluyendo razones conmensurables e inconmensurables, es decir, números racionales e irracionales; claro está, sin emplear números para expresar tales razones, con lo cual, estos conceptos, al igual que con Aristóteles, quedaron vinculados únicamente a la geometría: las razones y proporciones no son números, sino relaciones entre magnitudes y, en algunos casos, entre números.

La idea de razón de Eudoxo excluye el cero y clarifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; ésta se enuncia en la definición 4 del libro V de los *Elementos* de Euclides de la siguiente manera: "*Dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra*"[15] (Euclides, traducido por Vera, 1970, p. 787).

Más importante aún, es la definición 5 del mismo libro, a partir de la cual, se introduce la teoría de las proporciones:

> *Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente* (Ibid., p. 787).

En símbolos modernos, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si dados dos números naturales m y n, si

$ma > nb$, entonces $mc > nd$, ó

$ma = nb$, entonces $mc = nd$, ó

$ma < nb$, entonces $mc < nd$.

Con base en esta definición, se abordó el asunto de los inconmensurables, específicamente con la primera y tercera de las afirmaciones anteriores, que resultan sorprendentes, por cuanto se obtienen razones iguales a partir de dos desigualdades. Además,

---

[15] Esta formulación se conoce como Axioma de Arquímedes, pero Arquímedes mismo, atribuía esta propiedad a Eudoxo.

si cambiamos a, b, c y d por números como $\sqrt{2}$, el producto cruzado no tienen sentido en relación con el significado griego de número, pero esto en cambio, si fue usado muy inteligentemente por Dedekind en su teoría sobre cortaduras.

Realmente, respecto a una visión actual, lo que hizo Eudoxo fue evitar los números irracionales como números, abordándolos como magnitudes[16]; de hecho, lo que hoy llamamos número, Eudoxo lo trataba desde la geometría –como magnitud–. Ello contribuyó a la distinción entre aritmética y geometría[17], generando grandes avances en la segunda, dado que la mayor parte del álgebra se convirtió en geometría. Aunque el estudio de los números naturales y sus razones siguió haciéndose desde la aritmética, la geometría, como lo señala Kline (1972), *se convirtió en la base de casi toda la matemática rigurosa durante los dos mil años siguientes*.

1.1.5. Euclides de Alejandría. El expositor de la matemática elemental griega.

Hacia finales del siglo IV a.C., Alejandría se constituyó en el centro cultural y científico del mundo griego, de manos de Alejandro Magno y Ptolomeo I. Este último gobernante estableció un museo y una biblioteca en Alejandría, semejante a una universidad, a la cual llamó a célebres sabios para que fueran maestros en ella; entre éstos, Euclides, el autor de *Los Elementos*. Es muy poco lo que se sabe acerca de la vida de Euclides, ni siquiera su lugar de nacimiento[18], se destacó por su habilidad expositiva y capacidad pedagógica, más que por algún descubrimiento nuevo atribuido a él; precisamente, los Elementos se constituyeron en un libro de texto que cubría todas las matemáticas elementales de su tiempo (aritmética, geometría y álgebra), descritas y organizadas lógicamente[19]. Los Elementos de Euclides muestran el estado de gran parte de las matemáticas de la época, las ramas de estudio y los

[16] No existe en los planteamientos de Eudoxo alguna referencia a números racionales o irracionales, sus teorías están elaboradas sobre las magnitudes; sin embargo, las magnitudes inconmensurables constituyen los antecedentes históricos de los, que hoy denominamos, números irracionales.
[17] Para esta época, las matemáticas no eran más que el estudio de los números y de la forma, dejaron de ser un conjunto de técnicas para contar o medir, tenían un interés intelectual (Devlin, 2003, p.12)
[18] Es conocido como Euclides de Alejandría, porque fue llamado a enseñar en el museo.
[19] Aunque Euclides haya tomado la obra de sus antecesores, sin asumirla como suya, se cree que el orden lineal de los Elementos, si es original de él.

resultados que se habían obtenido; además, esta obra ha ejercido gran influencia en todos los tiempos, es tal vez, junto a la Biblia, el libro más editado e impreso.

Los Elementos constan de trece libros: los cuatro primeros tratan sobre geometría plana, los libros V y VI sobre la teoría de magnitudes, los libros VII, VIII y IX de aritmética (teoría de números), el libro X sobre los inconmensurables y los últimos tres sobre geometría del espacio, precedidos todos por 5 postulados y 5 nociones comunes.

En el libro V, uno de los más admirados y estudiados, porque se encuentra expuesta en detalle la teoría de las proporciones de Eudoxo. No hay, de manera explícita, una definición de magnitud, pero se pretende incluir magnitudes conmensurables e inconmensurables, poniendo el énfasis en las razones y proporciones que se pueden establecer entre éstas. Pero las generaciones de matemáticos posteriores a Euclides, consideraron la teoría de las proporciones sólo aplicable a la geometría, quedando en el tintero la posibilidad de fundamentar lógicamente una teoría de los números reales a partir de ésta[20].

Los libros VII y VIII constituyen el estudio de la aritmética, es decir de los números (naturales desde el uno) y sus razones; para ello, Euclides representa los números mediante líneas horizontales indivisibles cada una, una seguida de la otra. Los argumentos de las demostraciones en estos libros no son de tipo geométrico, las pruebas son verbales y Euclides no emplea los resultados de los libros anteriores. En estos libros, Euclides demuestra muchas de las proposiciones que ya habían sido demostradas en el libro V para las magnitudes, tal vez influenciado por las ideas de Aristóteles respecto a la oposición entre lo discreto y lo continuo, o porque para lo números ya existía una teoría de proporciones, anterior a la de Eudoxo. Por ejemplo, la proposición 12 del libro V, que enuncia (Figura 2): "*Si de cualquier número de magnitudes cada una de las antecedentes tiene la misma razón con cada una de las consecuentes, en la misma razón estarán todas las antecedentes y todas las consecuentes*"[21](Euclides traducido por Vera, op. cit., p. 797), tiene su equivalente en el libro VII, con la proposición 12: "*Si varios números son proporcionales, la razón de un*

[20] Realmente, no había en los Elementos una fundamentación, ni siquiera para los números racionales.
[21] Lo cual se escribe en términos modernos como "*Si es* $a1 : b1 = a2 : b2 = \ldots = an : bn$ *se verifica* $a1 + a2 + a3 + \ldots + an : b1 + b2 + b3 + \ldots + bn : ai = bi$"

antecedente a su consecuente es igual a la de todos los antecedentes a todos los consecuentes" (Ibid., p. 836).

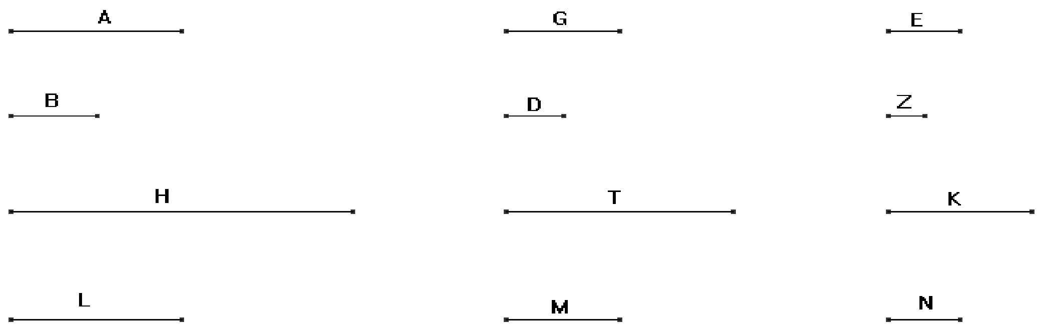


Figura 2

Pese a esta situación, hay algunas proposiciones en las que Euclides relaciona magnitud y número, como la proposición 5 del libro X: *"Las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón de un número a otro"* (Ibid., p. 863). Es precisamente en este libro donde se emprende la tarea de clasificar, desde la geometría, los inconmensurables de las formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

En el panorama de esta época, respecto a los números reales, se observa, entonces, los antecedentes de los irracionales cuadráticos y algunos bicuadráticos, estudiados únicamente desde la geometría y no aceptados como números. Esto fue interpretado por los sucesores de Euclides como la priorización del razonamiento geométrico en detrimento del razonamiento aritmético y algebraico.

1.1.6. Matemáticos orientales.

Los matemáticos hindúes y árabes, sucesores de la hegemonía matemática griega de la antigüedad, dieron importantes avances en el estudio de la aritmética, la geometría y el álgebra, al manejar los números irracionales como si fueran números naturales; esto es, entidades con las cuales era posible operar siguiendo reglas o procedimientos válidos para los números naturales, y tratar de atenuar la distinción entre aritmética y geometría, impuesta por los griegos.

Los hindúes consideraban también como números las raíces irracionales de otros números e idearon métodos para operar con ellos. Sin embargo, como señala Boyer (1986, p. 285) *"la contribución hindú fue el resultado de una inconsciencia de tipo lógico, más que de una profundidad matemática"*; efectivamente, los hindúes estuvieron interesados en actividades de cálculo, más que en cuestiones de tipo filosófico o deductivo, lo cual hizo que pasaran por alto las dificultades lógicas implícitas en la aceptación de los números irracionales y que los griegos creían fundamentales; así pues, para ellos no había impedimento alguno en aceptar los números irracionales, contribuyendo en gran medida al desarrollo de las matemáticas, con métodos de cálculo que aunque no demostraron resultan correctos.

Bhaskara (1114 – 1185), por ejemplo, dice *"Llamemos la suma de dos irracionales al mayor número irracional, y dos veces su producto al menor de ellos. La suma y la diferencia de ellos se efectúa como si fueran números enteros"* (Kline, op. cit., p. 251), es decir, dados los irracionales $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$, por ejemplo, la suma se obtiene así:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(2+3)+2\sqrt{2\cdot 3}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

De manera similar, Bhaskara, da reglas para multiplicar, dividir y extraer la raíz cuadrada de expresiones irracionales. Otra regla de Bhaskara para la suma de dos irracionales, es la siguiente: "*La raíz del cociente del mayor irracional dividida por el menor, aumentada en una unidad; la suma elevada al cuadrado y multiplicada por la menor cantidad irracional es igual a la suma de las dos raíces irracionales*" (Ibid., p. 252), para nuestro ejemplo:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^2\cdot 2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Los árabes, al igual que los hindúes, trabajaron libremente con los irracionales; "*De hecho, Omar Khayyam (1048? – 1122) y Nasir – Edwin (1201 – 1274) afirman claramente que toda razón de magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables, puede ser considerada como un número, aseveración que Newton se vio obligado a reafirmar en su Aritmética Universal de 1707*" (Ibid., p. 259), con lo cual se observa que los árabes aceptaron el número como colección de unidades, como magnitud continua y como razones entre éstas. La inconmensurabilidad entre magnitudes geométricas se asoció con la irracionalidad numérica, con lo que se hizo posible asignar valores numéricos a los segmentos y demás magnitudes, importante resultado que llevó a la aceptación de la coexistencia mutua entre el álgebra y la geometría y la desaparición de la distinción entre números racionales e irracionales, en lo que a las operaciones y propiedades de éstas se refiere. Sin embargo, esta aceptación tardó bastante tiempo, sólo logró consolidarse hasta el siglo XIX, como veremos más adelante.

Es interesante la manera algebraica como los árabes manejaron los irracionales. Ejemplos de esto se pueden observar en la obra de Al–Karkhi y Al–Baki, quienes introdujeron varias transformaciones de expresiones irracionales y comentaron el libro X de los Elementos, ilustrando algunas de sus proposiciones con ejemplos numéricos, y de Al–Khowarizmi, quien realizó operaciones con irracionales cuadráticos y empleó las expresiones números audibles y números sordos, para referirse a los números racionales e irracionales (no expresables), respectivamente.

Los árabes emplearon los métodos que habían introducido los hindúes para operar con números irracionales y agregaron transformaciones como $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ y $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, todas ellas como resultado de procedimientos similares verificados con números enteros. Así, los números irracionales empezaron a aceptarse y a manejarse como números, sobre la base de lo que ya estaba aceptado para los números naturales; es la primera vez que aparece una amplia concepción de número como cantidad, magnitud y razón, la de número real (positivo).

Otro aporte importante de los árabes fue el cambio en el carácter de las matemáticas, dada fundamentalmente por la aceptación de los números irracionales, o mejor dicho, la ampliación de la concepción de número. Esto contribuyó al desarrollo de la aritmética, su integración con la geometría y la creación de un álgebra más trascendente, donde los símbolos y las operaciones pueden ser aplicados a cualquier clase de números.

1.2. SEGUNDA ETAPA: Fracciones decimales[22] *y fracciones continuas.*

A finales de la edad media, declinó el trabajo científico en el oriente y empezó a tomar impulso en Europa, gracias al saber heredado de la antigüedad europea y oriental y a los movimientos conquistadores en oriente. A comienzos del siglo XIII, Fibonacci de Pisa, da el primer paso en el estudio de los irracionales en Europa, con la aproximación de la raíz de un número sordo (número que no tiene raíz cuadrada), por medio de una fracción sexagesimal. Es aquí donde se inicia un nuevo enfoque y una nueva etapa en el estudio de los números irracionales con el uso de fracciones.

1.2.1. Fracciones sexagesimales, unitarias y comunes.

El concepto de fracción[23] se dio relativamente tarde; las culturas primitivas no tuvieron necesidad de usar números de este tipo, los evadían creando unidades más pequeñas, por lo menos, en lo relacionado con las medidas; aún los romanos establecieron un sistema de medidas con submúltiplos para no utilizar los números fraccionarios[24].

Al parecer, una de las culturas que trabajó con fracciones fue la babilónica, que como es bien sabido, desarrolló un sistema de numeración posicional base sesenta alrededor de los años 2400 a.C., sistema que extendió a las fracciones, conociéndose éste como sistema

---

[22] Utilizaremos indistintamente el término fracción y fraccionario para referirnos a expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales y $b \neq 0$.

[23] La palabra fracción viene del latín frangere (romper, quebrar), se refiere a un número quebrado y así fue llamado frecuentemente.

[24] La unidad principal era el *as*, $\frac{1}{12}$ del *as* era llamado *uncia* cuyo símbolo era –, $\frac{2}{12}$, un *sextans*, representado por =; entre otros. Para más información, consultar SMITH, David, *History of mathematics*, vol. II, Dover, New York, 1958, p. 208.

sexagesimal; por ejemplo, podía bien significar 122 (es decir, $2 \cdot 60 + 2$) o $\frac{61}{30}$ (es decir, $2 + 2 \cdot 60^{-1}$) o cualquier otra fracción que se pueda derivar de esta notación (Boyer, op.cit., p. 51)

Aaboe (1964, p. 25) señala que los babilonios poseían tablas para los recíprocos de algunos números con las cuales realizaban divisiones partiendo del hecho de que:

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

Dice además que elaboraron tablas para aproximaciones de $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{13}$ entre otras (se destaca que estas fracciones tienen expresiones sexagesimales infinitas periódicas).

Smith (1994, p. 33) expone algunos símbolos, que utilizaban los babilonios para expresar fracciones, como se muestra a continuación:

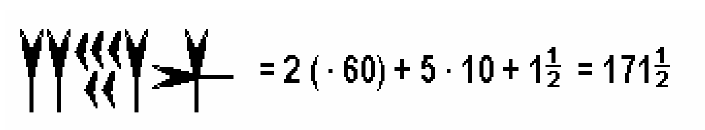


Figura 3

Sin embargo, el mismo Smith en su obra *History of Mathematics* (1958, p. 230) afirma que si bien es cierto que los babilonios tenían un sistema base sesenta no hay razón para creer que esta es una prueba del uso de las fracciones sexagesimales por los babilonios, pues aunque en tablillas que datan de aproximadamente 2000 a.C. se encuentra, por ejemplo, que el cuadrado de 44 26 40 es 32 55 18 31 6 4, esto puede ser interpretado como el cuadrado de $44 \cdot 60^2 + 26 \cdot 60 + 40$ o de $44 + \frac{26}{60} + \frac{40}{60^2}$, lo último originado, tal vez, de una interpretación en relación con el sistema numérico utilizado por esta civilización.

Según autores como Boyer y Smith, un concepto cercano al de fracción apareció por primera vez en la cultura egipcia; los egipcios, mediante sus numerales jeroglíficos (que datan aproximadamente del año 3000 a.C.) notaron fracciones, particularmente, fracciones unitarias; esto es, fracciones cuyo numerador es el uno, algunos ejemplos de las fracciones escritas en la notación jeroglífica son:

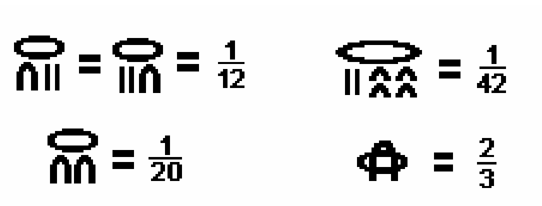


Figura 4

Los anteriores numerales indican que el óvalo representaba el uno de la fracción unitaria, el cual se colocaba sobre el número escrito en sistema jeroglífico; no obstante, los egipcios tenían símbolos especiales para algunas fracciones, algunas de la forma $\frac{n}{n+1}$ como $\frac{2}{3}$. Los egipcios utilizaron otro sistema de numeración, el hierático, debido a la facilidad para escribirse sobre los papiros, pues era cursivo; en éste, las fracciones unitarias eran escritas de manera un poco distinta, como se muestra enseguida:

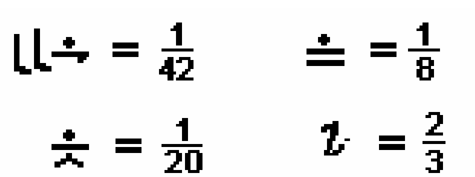


Figura 5

Según los historiadores, el punto es el equivalente al óvalo en el sistema jeroglífico[25]; esta notación para las fracciones es hallada en uno de los instrumentos egipcios reconocidos como de mayor importancia, el *Papiro de Ahmes* (conocido también como el *papiro de Rhind*), documento que data de aproximadamente 1500 años a.C., en cuya primera sección aparece una tabla para dividir por dos y por los números impares, desde $\frac{2}{3}$ hasta $\frac{2}{101}$, además se encuentra, como ya se había dicho antes, el interés de los egipcios por las fracciones unitarias, en el papiro se hallan fracciones comunes escritas como suma de fracciones unitarias, de varias formas, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{43} &= \frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}\\ &= \frac{1}{24}+\frac{1}{258}+\frac{1}{1032}\\ &= \frac{1}{30}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645}\\ &= \frac{1}{36}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645}+\frac{1}{172}+\frac{1}{774}\\ &= \frac{1}{40}+\frac{1}{860}+\frac{1}{1720}\end{aligned}$$

así, desarrollaron numerosas reglas para formar fracciones unitarias; sin embargo, no existe una aplicable a todos los casos[26]; además, preferían unas representaciones más que otras[27].

---

[25] El punto fue usado como un símbolo para la fracción aún en la época moderna, tal como se encuentra en copias de libros ingleses del siglo XVIII, en los cuales $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ se representaban como $\frac{\bullet}{2}$ y $\frac{\bullet}{4}$ respectivamente.

[26] Si $b + c = ka$, se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{1}{b\frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c\frac{b+c}{a}}$, resultado usado por Ahmes en algunos casos, pero no en todos.

[27] Es conocido que Ahmes y sus predecesores referían, para dos tercios, las dos primeras representaciones mostradas.

Si bien los egipcios trataron las fracciones de manera sistemática y definieron reglas y métodos generales para la escritura de fracciones mediante fracciones unitarias (Boyer, op. cit., pp. 34-37), lo cual representa un avance en el desarrollo de las matemáticas, no contribuyeron al conocimiento matemático en sí, pues el avance que alcanzaron fue más por necesidades prácticas que por intereses abstractos, como sí lo fue en la cultura griega.

Aunque en Grecia no denominaban a las fracciones como tal sino como razones, los griegos siguieron los métodos egipcios para representarlas, Herón (50?) y otros, por ejemplo, descomponían las fracciones comunes en fracciones unitarias y hasta entrado el siglo X, esta tradición se mantenía, según lo muestra el Papiro de Akhmin (que data, aproximadamente del siglo VIII) y escritos hebreos de Rabbi Sa´adia ben Joseph al-Fayyumî (citado por Smith, op. cit., p. 212). Los griegos, crearon un simbolismo para las fracciones, usando las letras de su alfabeto; escribían, por ejemplo, $\frac{1}{3}$ como $\overset{on}{\Gamma}$ o $\overset{\mathrm{II}}{\Gamma}$, donde Γ es el símbolo griego[28] para el tres, o $\frac{1}{4}$ como $^{\mathrm{II}}\Delta$ y para las fracciones comunes, escribían la fracción a la inversa; es decir, $\frac{4}{19}$ para $\frac{19}{4}$, como lo hacían Herón y Diofanto (275?); otros escritores griegos, como Aristarco (260 a.C.?), escribían la palabra para el numerador y el símbolo del número para el denominador, otros repetían el numeral para el denominador; esto es, para $\frac{2}{5}$, en símbolos modernos, 2’ 5’’ 5’’; sin embargo, cuando los científicos griegos necesitaban un sistema preciso de aproximación acudían al sistema sexagesimal como lo hacía Ptolomeo.

Nuestra simbología actual para las fracciones es debida, a los hindúes, aunque ellos no usaban el vínculo; Brahmagupta (620) y Bhaskara (1150) escribían, por ejemplo, $\times$ para $\frac{3}{2}$; al parecer, fueron los árabes quienes lo introdujeron, pero sólo se usó de manera general hasta en el siglo XVI[29]. Fibonacci (1180-1250) usaba con propiedad el sistema decimal derivado de

---

[28] Los símbolos griegos usados son modernos.

[29] La barra oblicua es el resultado del deseo por simplificar la escritura y las formas impresas, se cuenta que fue De Morgan quien la instituyó en 1845.

los numerales hindú-arábigos al igual que el vínculo para las fracciones, pero extrañamente, éstas las escribía como sexagesimales, como comunes o como unitarias sin extender el sistema decimal a las fracciones.

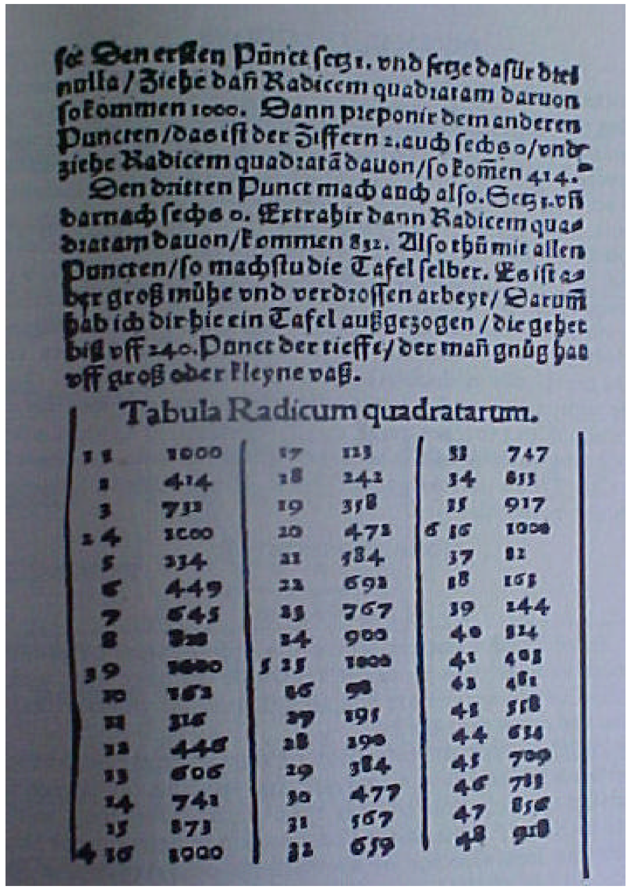
1.2.1. Fracciones decimales.

Los chinos, por su parte, también usaron las fracciones y según se cuenta, sin dificultad desde épocas remotas, el Chou Pei (aprox. 1105 a. C.) contiene problemas que involucra números como $247\frac{933}{1460}$, no escrito simbólicamente, pero sí verbalmente (Ibid., p. 215). Los chinos fueron los pioneros de las fracciones decimales (siglo XIV a.C.), tal vez, derivadas del sistema decimal de pesos y medidas que usaban. En un comentario a los *Nueve Capítulos* (segundo milenio a.C. aprox.) realizado en el primer siglo de esta era, hay algunas reglas que son hoy consideradas como precursoras de la invención de las fracciones decimales, estas son (Boyer, op. cit., p.264):

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{100a}}{10} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{1000a}}{10}$$

Dichas reglas se usaron en el siglo XV y XVI para la extracción de la raíz cuadrada y fueron resumidas posteriormente en una sola: $\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot 10^{kn}}}{10^k}$, la consecuencia más importante de esta regla, en relación con la fracción decimal, es su uso para la elaboración de tablas con muy buenas aproximaciones de algunas raíces cuadradas como puede verse en la tabla de la Figura 6 de Adam Riese's Rechnung auff der Linien vnd Federn (1522).

La segunda influencia más importante en el desarrollo de la fracción decimal fue la regla para dividir números de la forma $a \cdot 10^n$, atribuido a Regiomontano (1436 -1476), por el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) y que aparecen algunos ejemplos en la obra de Chuquet (1484) como $470 \div 10 = 47$ y $503 \div 10 = 50\frac{3}{10}$ y en la de Pellos (1492), quien usa el punto decimal, por primera vez, para separar un entero de la fracción decimal (ver Figura 7) pero sin comprender la naturaleza de los decimales.



so Den ersten Punct setz 1. vnd setze dafür drei nulla / Ziehe dan Radicem quadratam daruon so kommen 1000. Dann preponir dem anderen Puncten/das ist der Ziffern 2. auch sechs o/vnd ziehe Radicem quadratã dauon/so komen 414. Den dritten Punct mach auch also. Setz 1. vñ darnach sechs o. Extrahir dann Radicem quadratam dauon/kommen 732. Also thũ mit allen Puncten/so machstu die Tafel selber. Es ist aber groß mühe vnd verdrossen arbeyt/ Darum hab ich dir hie ein Tafel außgezogen / die gehet biß vff 240. Punct der tieffe/ der man gnug hat vff groß oder kleyne vaß.

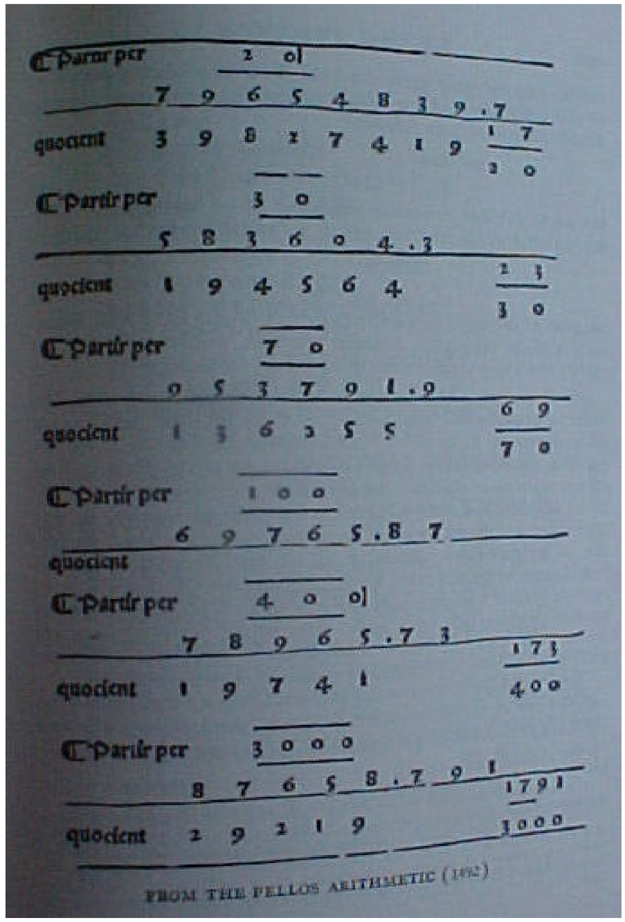
Tabula Radicum quadratarum.

1	1	1000		17	123		33	747
	2	414		18	242		34	831
	3	732		19	358		35	917
2	4	2000		20	472	6	36	1000
	5	234		21	584		37	82
	6	449		22	692		38	165
	7	645		23	767		39	244
	8	828		24	900		40	324
3	9	3000	5	25	1000		41	403
	10	162		26	98		42	481
	11	316		27	195		43	558
	12	446		28	290		44	634
	13	606		29	384		45	709
	14	741		30	477		46	783
	15	873		31	567		47	856
4	16	4000		32	659		48	928

Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 237

Figura 6

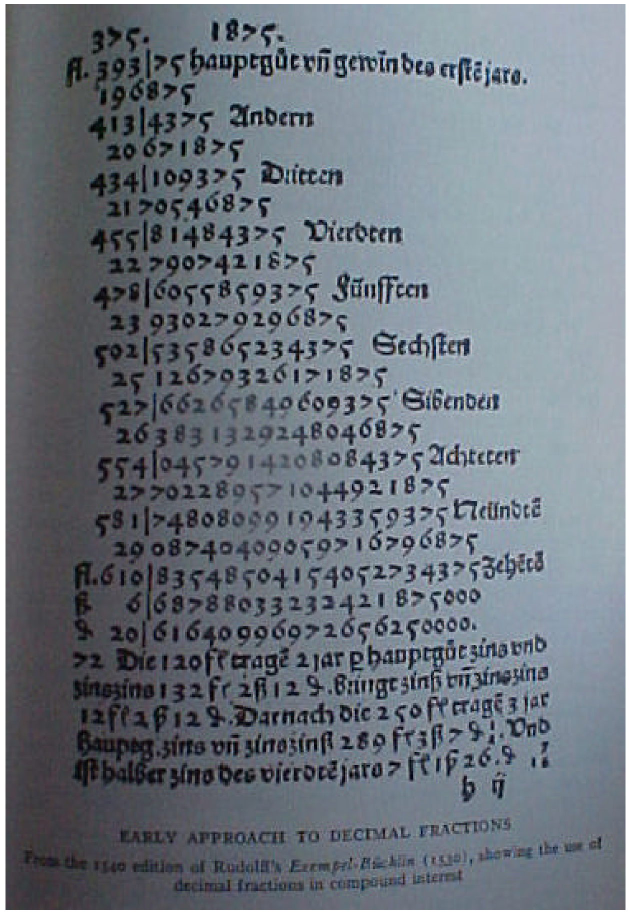
El uso del punto decimal propuesto por Pellos no tomó trascendencia, pues escritores posteriores a él utilizaban una línea vertical para este propósito, como Rudolff (1530), Cardano (1539), Cataneo (1546), Viète (1579), entre otros; el primero de éstos, Christoph Rudolff (1500–1545?), trabajó sistemáticamente con fracciones decimales y sus operaciones pero no escribió teoría sobre ellas (ver Figura 8), y es debido a esto que algunos historiadores como Klein y Smith, consideran que este hombre es el inventor de las fracciones decimales ya que su obra Coss (1525) es una de las primeras impresiones donde aparecen las fracciones decimales.



Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 239

Figura 7

Viète fue uno de los más prominentes defensores del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales como lo manifiesta en su obra *Canon-mathematicus* (1579) y utilizó tanto números en negrita como barras horizontales y verticales para notar las fracciones decimales; por ejemplo, escribía 314.159. $\frac{26535}{100000}$ o 314.159.265.36 o 99.946|458.75.



Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 241

Figura 8

No obstante, en Oriente se usaba, un poco antes de Pellos, la fracción decimal. Al-Kashi (aprox. 1436) se auto consideró el inventor de las fracciones decimales ya que, aunque utilizaba principalmente fracciones sexagesimales, atribuía a las decimales la misma exactitud que las primeras y las usó para dar un valor de π, así:

sah-hah
3 1415926535898732

lo cual, en nuestros guarismos actuales corresponde a 3,1415926535898732; que como puede verse es una muy buena aproximación de este número irracional.

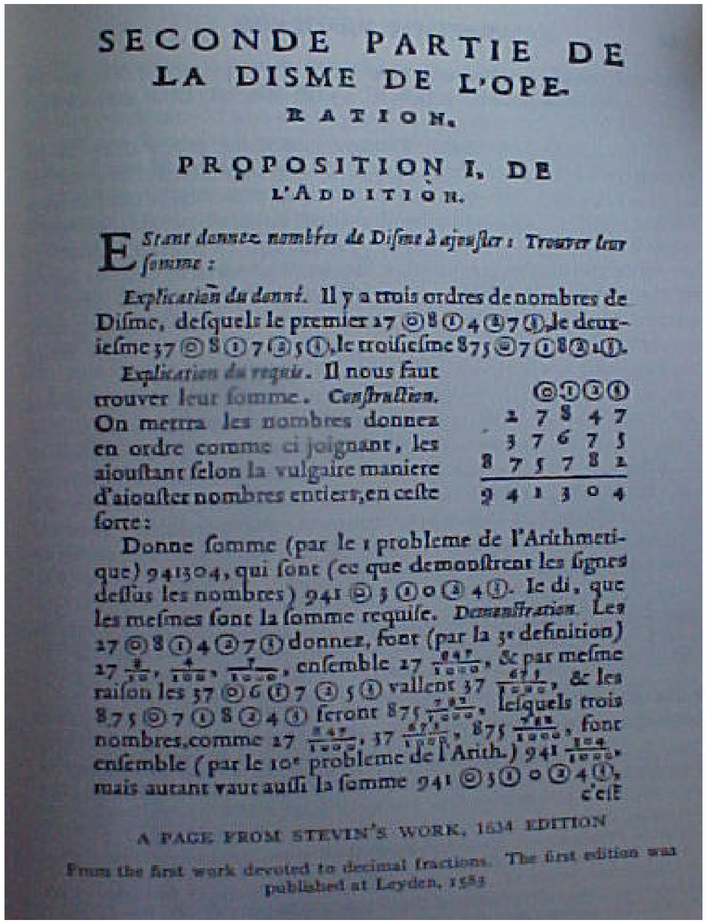
Lo que si es conocido por muchos es que hasta 1585 aparece un libro que contiene por primera vez toda la teoría sobre las fracciones decimales y éste es *De Thiende*, titulado así en flamenco, pero más célebre como *La Disme* y escrito por Simon Stevin de Brujas (1548–1620), quien obviamente, no fue el inventor de los números decimales ni mucho menos el que desarrolló un mejor simbolismo para éstos, pero sí quizás quien los comprendió totalmente.

Su reconocimiento es debido a que, por una parte, mediante su cuadernillo, explica de manera sencilla cómo usar la notación decimal y su operatividad sin recurrir a los fraccionarios, y lo hace accesible a cualquier comerciante de la época, que era lo que pretendía Stevin, difundir los decimales entre las personas corrientes para que fuesen utilizados en la ejecución de problemas prácticos de manera similar a como manejaban los números naturales, en palabras de Klein (1968, p. 186), Stevin " (…) *pone su experiencia en la práctica comercial, financiera e ingenieril al servicio de sus preocupaciones "teóricas" e inversamente, su "teoría" se pone en marcha dentro de su "actividad práctica"*; y por otra, Stevin contribuyó a un cambio en la concepción de la matemática, más específicamente en la concepción de número, identificando en un solo concepto las magnitudes continuas y las cantidades discretas.

Como se señaló anteriormente, el simbolismo usado por Stevin para los decimales fue tan pobre como elemental; para representar las posiciones de cada número, escribía al lado o sobre cada numeral la potencia que 10 debía llevar en el denominador si fuese representado como fraccionario; así, Stevin notaba, por ejemplo, 27,847 de la siguiente manera

⓪ ① ② ③
2 7 8 4 7

o 2 7 ⓪ 8① 4 ② 7③, como puede observarse en la Figura 9.



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPE- RATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster: Trouver leur somme:

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Je di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) 27 $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, ensemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent 37 $\frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③ feront 875 $\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

A PAGE FROM STEVIN'S WORK, 1634 EDITION

From the first work devoted to decimal fractions. The first edition was published at Leyden, 1585

Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 243

Figura 9

Como es de suponerse, este simbolismo no fue utilizado por mucho tiempo; el mejoramiento en la notación decimal fue debido a matemáticos posteriores como Jobst Bürgi[30] (1552–1632), G. A. Magini (1555–1617), Christoph Clavius[31] (1537–1612) y Johann Hartman Beyer[32] (1563–1625). Pero John Napier (1550-1617), fue quien popularizó el uso del punto decimal en sus tablas de logaritmos; aunque él inicialmente no lo usó, en la edición de su obra, hecha en 1616 por Edward Wright, aparecen los números decimales tal como los

[30] A quien Kepler, en su obra de 1616 atribuyó la fracción decimal.

[31] El uso del punto decimal se le atribuye a Magini o a Clavius, ambos amigos de Kepler (Boyer, C., op cit., p. 386).

[32] Beyer, en una carta a Kepler escribió 314, 1' 5'' 9''' 2'''' 6''''' 5'''''' para 314.15926 (Smith, D., op cit, p. 245).

escribimos en la actualidad. Además en la obra *Rhabdologiae* de 1617, Napier hace referencia a los decimales de Stevin y propone usar punto o coma para indicar separación entre la parte entera y la decimal; sin embargo, en escritos posteriores se encuentra multitud de representaciones para los números decimales (Smith, Op. cit., p. 246) y aún, en nuestros días no hay acuerdo entre el punto decimal, la coma o superíndices subrayados para la escritura de números decimales.

1.3.3. Las fracciones continuas.

El desarrollo de la notación decimal no sólo contribuyó a la representación de números racionales sino también a la representación de los irracionales. Aunque a principios del siglo XVI, los irracionales se usaban con cierto grado de libertad, no estaba establecido si eran o no números, algunos personajes de ese siglo los consideraban como tal, por ejemplo Stevin los aproximaba mediante números racionales y afirmaba: "*QUE CUALQUIER NÚMERO PUEDE ser cuadrado, cúbico, etc. Así como cualquier raíz es un número*" (Stevin, 1585, p. 8, citado por Waldegg, 1996, p. 13);

sin embargo, matemáticos como Michael Stifel (1486?-1567) no les atribuía el carácter de números, pues para él los números eran o enteros o fraccionarios y obviamente, los irracionales no están incluidos en esta tipificación, esto en razón de que al representarlos como decimales no encontraba periodicidad; en términos de Stifel,

> (…) *otras consideraciones nos obligan a negar que los números irracionales sean números en absoluto. Esto es, cuando tratamos de someterlos a numeración... hallamos que se escapan continuamente, de forma que ninguno de ellos puede ser aprehendido precisamente en sí mismo .Por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una especie de nube de infinitud* (Stifel, citado por Kline, op. cit., p. 337).[33]

[33] Esta nota indica, al parecer, que para Stifel, expresiones como 0,222… , además de los irracionales, no eran números.

Es así, como los matemáticos de los siglos XV y XVI, preferían en general, usar otras notaciones para los irracionales, por ejemplo, Cardano, Viète y el mismo Stifel[34] los representaban a la manera de los hindúes y los árabes, incluyendo cada vez, más expresiones como $\sqrt[3]{287\tfrac{1}{2}-\sqrt{80449\tfrac{1}{4}}}$, $\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$, entre otras.

Las fracciones continuas surgen, como una representación para algunos números irracionales cuadráticos, aunque ya habían sido usadas para representar números racionales siguiendo el algoritmo de la división de Euclides (Smith, Op. cit., pp. 418-419). La teoría moderna de las fracciones continuas es debida al algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1573), quien en el capítulo correspondiente a la raíz cuadrada en su *Álgebra* (1572) expone la fracción continua de $\sqrt{2}$ (Kline, op. cit., p. 341), en notación moderna:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

O también se escribe como:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\dots$$

Según cuenta Kline, Bombelli mostró otros ejemplos de cómo obtener fracciones continuas infinitas para otros irracionales cuadráticos, pero no se cuestionó si ellas convergían o no a los números dados. Y aunque Bombelli presentó tales fracciones continuas no es a él a quien se le atribuye la teoría sobre este tema, es Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) quien se lleva los honores, aunque usó el mismo método de Bombelli, expresó otras raíces cuadradas como la de 18, así:

[34] Stifel trabajaba con números irracionales de la forma $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$.

$$4.\&\frac{2}{8.}\;\&\frac{2}{8.}\;\&\frac{2}{8.}$$

Un paso, un poco más importante en la evolución de las fracciones continuas es dado por Lord Brouncker quien a partir de la fórmula dada por Wallis para π halla, no se sabe de qué manera, una expresión en fracción continua infinita del número π:

$$\frac{4}{p}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}$$

El primer escrito importante acerca de este tema fue elaborado por Euler en 1737, en el cual representa como fracción continua infinita el número e, número del cual hablaremos más adelante. Lagrange y Galois fueron los últimos matemáticos que aportaron a la teoría de las fracciones continuas[35].

1.3. TERCERA ETAPA: Distinción de los números trascendentes.

A mediados del siglo XVII, el panorama en cuanto a los números irracionales no era muy alentador; aún no había algún acuerdo respecto a si éstos eran o no números, ni mecanismos para estudiarlos, caracterizarlos u operar con ellos. Aunque los cálculos con números irracionales se efectuaban con cierta libertad, el problema de si tales expresiones eran realmente números, era aún fuente de inquietud en la comunidad matemática de la época. Durante los siglos XVII y XVIII se presentaron diversos contrastes y posiciones encontradas, que contribuyeron notablemente al desarrollo de las matemáticas, especialmente de la aritmética, el álgebra y el análisis y que, finalmente, generaron el ambiente propicio para la consolidación del concepto de número real.

[35] Para mayor información, consultar en la bibliografía de SMITH, D., op. cit., p. 421.

Para un selecto grupo de matemáticos, entre quienes pueden señalarse el francés Blaise Pascal (1623–1662) y el inglés Isaac Barrow (1630–1667), los números irracionales no eran aceptados como tales, sino como magnitudes geométricas: *"los números irracionales son meros símbolos que no tienen existencia independiente de la magnitud geométrica continua, y la lógica de las operaciones con números irracionales debe justificarse por el método eudoxiano de las magnitudes"* (Pascal, citado por Romero, op. cit., p. 52).

Este punto de vista se mantuvo, por lo menos un siglo más, como puede observarse en la *Aritmetica Universalis*, del también matemático inglés y discípulo de Barrow, Isaac Newton (1642 – 1727), publicada en 1707, aunque, de cierta manera, acepta los irracionales como números:

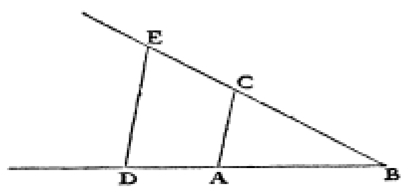
> *Por número entenderemos, no tanto el conjuntos de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquello que se mide con unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad* (Newton, citado por Kline, op. cit., p. 337).

En contraste con estas afirmaciones, y junto al trabajo desarrollado por Stevin sobre los decimales, aparecen posiciones como las de Descartes (1596–1650) y Wallis (1616–1703), quienes admitían los números irracionales en su pleno sentido, con los cuales se pueden representar magnitudes continuas[36]. El matemático y filósofo francés René Descartes, en el segundo capitulo, titulado "*Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas*", de su obra *La géométrie*, publicada como apéndice de su *Discours de la méthode* de 1637, presenta el segmento unidad desde un punto de vista diferente al de Euclides, no sólo como unidad de medida ó como unidad indivisible, sino como la unidad elemento neutro de la multiplicación, con lo cual cambia el papel de ésta en la teoría de las proporciones permitiendo la aceptación de los números racionales e irracionales, al menos los construibles, como tales; en términos de Descartes (1637, citado por Smith, 1954):

[36] WALLIS, J (1685), *Àlgebra* y DESCARTES, R (1628), *Reglas para la dirección del espíritu*.

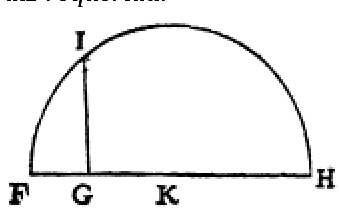
Cualquier problema en geometría puede ser fácilmente reducido a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción. Así como la aritmética consiste sólo de cuatro o cinco operaciones, a saber, adición, substracción, multiplicación, división y la extracción de raíces, la cual puede ser considerada una clase de división, así en la geometría, para encontrar líneas requeridas es simplemente necesario sumar o substraer otras líneas; o de otra parte, tomar una línea la cual llamaré unidad para relacionarla lo más cercanamente posible a los números, y la cual puede en general ser escogida arbitrariamente, y teniendo dadas otras dos líneas, encontrar una cuarta línea, que será a una de las líneas dadas como la otra es la unidad (lo cual es lo mismo que la multiplicación); O, de nuevo, encontrar una cuarta línea que es a una de las líneas dadas como la unidad es a la otra (lo cual es equivalente a la división); o finalmente, encontrar una, dos o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (lo cual es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, raíz cúbica, etc., de la línea dada). Y yo no vacilaré en introducir estos términos aritméticos en la geometría, en el interés de obtener una mayor claridad.

Por ejemplo, tomemos AB como unidad, y que ella sea requerida para multiplicar BD por BC. Yo sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA, entonces BE es el producto de BD y BC.



Si se requiere dividir BE por BD, yo uno E y D, y trazo AC paralela a DE, entonces BC es el resultado de la división.

Si se desea la raíz cuadrada de GH, yo adiciono a lo largo de la misma la misma línea recta, FG igual a la unidad; entonces bisecando FH en K, describo el círculo FIH tomando a K como centro, y trazo desde G una perpendicular que se extienda hasta I, y GI es la raíz requerida.



Yo no hablo aquí de raíz cúbica, o de otras raíces, ya que después hablaré de ellas más convenientemente.

También aparecen los intentos de matemáticos, como Viète, Wallis y Euler, por obtener mejores aproximaciones y demostrar la irracionalidad de ciertos números

Es importante resaltar de esta época, el paulatino avance en la imposición del álgebra sobre la geometría. En la obra *Tractatus de sectionibus conicis*, de 1655, Wallis "*reemplazó sistemáticamente los conceptos geométricos por conceptos numéricos en todas las partes en que ello fuera posible*" (Boyer, op. cit., p. 478) y en su *Álgebra*, de 1685, dedujo algebraicamente todos los resultados del libro V de los Elementos de Euclides, el gran bastión de la geometría antigua. Así, hacia el siglo XVIII, el álgebra había ganado su reconocimiento como una rama fundamental de las matemáticas y era empleada con cierta confianza, pese a la carencia de fundamentos lógicos como los de la geometría; este elemento fue importante en el proceso de aceptación y manipulación de los números reales.

Las ideas respecto a los números reales, se fueron transformando durante estos dos siglos, con la aparición de los números trascendentes y la distinción entre tipos de irracionales. No obstante, el problema de fundamentar lógicamente el sistema numérico, constituido con los nuevos tipos de números (irracionales y enteros) además de los números naturales y de las fracciones, era un trabajo difícil que habría de aguardar hasta el siglo XIX para tomar la forma que hoy conocemos.

1.3.1. Las series como aproximación a algunos números irracionales.

El problema de la cuadratura del círculo instó a varios matemáticos a calcular el valor de la razón entre una circunferencia y su diámetro, el número π, obteniendo, por diversos métodos, mejores aproximaciones, desde épocas muy antiguas y en varias civilizaciones[37]. No obstante, estas proezas de cálculo no tienen mayor significado teórico, por cuanto no se obtiene una expresión numérica exacta para π.

El primer matemático que dio un paso en esta dirección fue el francés François Viète (1540–1603), miembro del consejo real de Enrique III y Enrique IV y dedicado a las matemáticas en sus ratos de ocio. Viète fue el primero que obtuvo una expresión analítica

[37] Se tienen datos de aproximaciones de π en el papiro de Rhind, que data de 1700 años A. C., pasando por Grecia (Arquímedes), China (Liu-Hu), India (Bhaskara) y Europa en la edad media (Fibonacci de Pisa).

para π, como un producto infinito, que "*se puede obtener fácilmente inscribiendo un cuadrado en un círculo dado y aplicando la fórmula trigonométrica recursiva* $a_{2n} = a_n \sec \frac{p}{n}$ *, donde* a_n *es el área del polígono regular inscrito de n lados, y haciendo finalmente crecer n indefinidamente*." (Ibid., p. 407):

$$\frac{2}{p} = \cos\frac{90}{2} \cdot \cos\frac{90}{4} \cdot \cos\frac{90}{8} \cdots$$

De donde:

$$\frac{2}{p} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

La importancia de este resultado radica en el cambio sustancial de abordar lo infinitamente pequeño desde la aritmética, el álgebra y la trigonometría, y no únicamente con la geometría, como se hacía desde la época de los griegos, con lo cual, Viète se aproximó a un punto de vista más moderno en el estudio de las matemáticas.

Tan importante como este reconocimiento, es la obra de John Wallis, sin duda el matemático inglés más brillante, anterior a Newton. En su *Aritmética infinitorum*, de 1655, se encuentra una aproximación de π como un producto infinito, uno de sus resultados más conocidos, en su intento por encontrar la cuadratura del círculo:

$$\frac{2}{p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}$$

basada, seguramente, en el uso de sus principios de inducción e interpolación, aplicados a la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Sin embargo, este resultado no lo dejó del todo satisfecho, pues por ser un producto infinito, realmente no obtenía un valor exacto[38].

Es de resaltar en este siglo, la discusión entre Huygens y Gregory acerca de la posibilidad de expresar π algebraicamente. El escocés James Gregory (1638 – 1675) en su obra *Vera circuli hyperbolae quadrature*, amplió el algoritmo de Arquímedes a la cuadratura de elipses e hipérbolas y encontró una sucesión para las áreas inscritas y otra para las circunscritas, ambas convergentes al área de la región deseada, obteniendo de esta manera una buena aproximación de estas cónicas. Con este procedimiento intentó demostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo por métodos algebraicos. A raíz de esto surgió una “rivalidad” con Huygens, quién consideraba que π podía expresarse algebraicamente; poniendo en cuestión, de paso, los métodos de Gregory. El asunto fue resuelto dos siglos después al demostrarse la trascendencia de π, en contra posición con las afirmaciones de Huygens.

En el siglo XVIII, las series fueron consideradas como un tema de estudio fundamental del cálculo infinitesimal. Una de las principales aplicaciones de las series consistió en el cálculo de números especiales como π y *e*; tal es el caso de la famosa expresión:

$$\frac{p}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

obtenida por Leibniz en 1674[39].

Entre los matemáticos más importantes que realizó trabajos en esta dirección, se encuentra el suizo Leonard Euler (1707–1783), el genio tuerto de las matemáticas, nacido en Basilea y amigo y compañero de estudio de los Bernoulli, aunque la mayor parte de su trabajo lo desarrolló en Rusia, como maestro en la academia de San Petersburgo.

[38] Como ya se mencionó en el numeral anterior, William Brouncker (1620 – 1684), obtuvo una expresión para π con una fracción continua infinita, manipulando la expresión obtenida por Wallis.
[39] Realmente esta expresión no es muy útil, pues para obtener una aproximación de π, con la precisión de la obtenida por Arquímedes, se requerirían unos 100000 términos de la serie.

Euler es conocido como uno de los más grandes matemáticos de la historia, gran calculista, escritor[40] y estudioso de diversas ramas de las matemáticas, entre ellas, topología, álgebra y análisis. A él se debe la popularización del símbolo *e* para el "número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1", la base del sistema de logaritmos naturales, y de π, para la razón de la circunferencia al diámetro[41].

Pero, su trabajo más destacado es en el estudio de las series infinitas, su convergencia o divergencia y, en particular, el uso de éstas para expresar algunos números irracionales. Entre los resultados obtenidos por Euler se encuentra la expresión:

$$p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

donde el signo del término se determina así: si el denominador es primo de la forma $4m$ + 1, el signo es menos, si es primo de la forma $4m$ – 1, el signo es más y si es compuesto, el signo es el resultado del producto de los signos de sus factores primos.

Euler, aplicando injustificadamente reglas para polinomios finitos a polinomios infinitos, obtuvo resultados como

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(2p)^2} + \frac{1}{(3p)^2} + \cdots \qquad \text{o} \qquad \frac{p^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

fórmulas que habían burlado los esfuerzos de los hermanos Bernoulli, años atrás. De manera análoga descubrió otras expresiones; en su *Introduction in analysis infinitorum*, de 1748, aparecen los siguientes resultados:

[40] Se calcula que las obras conocidas de Euler abarcan unos 866 trabajos; tanto así, que casi medio siglo después de su muerte seguían publicándose memorias matemáticas inéditas de él, producía, en promedio, unas 800 páginas anuales de investigación matemática, a pesar de quedar tuerto a los 28 años y ciego totalmente, los últimos 17 años de su vida.

[41] Este símbolo fue usado por primera vez en 1706 por William Jones, para expresar la razón mencionada

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\cdots=\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{90}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{6}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

obtenidos a partir de las series de potencias para el seno y el coseno, y relacionando las raíces y coeficientes de una ecuación algebraica, con el polinomio de grado infinito

$$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!\,y}-\frac{x^5}{5!\,y}+\cdots=0$$

Por otra parte, Euler demostró la manera de sumar un número finito de términos de la serie armónica, empleando para ello la función logarítmica. Tomó como punto de partida la fórmula:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots$$

con lo cual,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\log\,(n+1)+C$$

esta C es conocida como constante de Euler, la sexta constante matemática importante, notada con la letra griega γ y definida por las expresiones

$$g\ =\underset{n\to\infty}{Lím}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right),$$

$$g\ =\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{x}}-\frac{1}{x^{n}}\right),$$

$$g\ =-\int_{0}^{\infty}e^{-x}Ln\ x\ dx\,,$$

constante de la cual aún no se sabe si es racional o irracional, pese a que una cifra tan complicada como γ no parece racional[42]; de hecho, el mismo Euler señaló que determinar el carácter de γ era un asunto importante; no obstante, este asunto sigue siendo un problema no resuelto, "*su irracionalidad universalmente aceptada, no ha sido demostrada*" (Dunham, 1999).

1.3.2. Demostraciones de irracionalidad y trascendencia.

Durante el siglo XVIII, se dieron eventos importantes en camino de la aceptación de los números irracionales, aunque no hubo mayores avances para formalizar el concepto de número irracional. Los números irracionales, nunca introducidos adecuadamente en el mundo matemático, fueron ganando su espacio entre la comunidad matemática de la época, aunque nadie se preocupó realmente por su fundamentación lógica, porque las propiedades de las

[42] Las primeras diez cifras de γ son 0,5772156649. Se han calculado cientos de cifras de este número, pero no se conoce alguna otra expresión analítica más simple; por ejemplo, el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), quien introdujo el símbolo γ para este número, lo cálculo con 19 cifras decimales precisas, en su obra *Adnotaciones ad calculum integrale Euleri*, y F. B. G. Nicolai (1793-1846) calculó el valor de γ con 40 cifras decimales exactas. (Dunham, 1999)

operaciones eran intuitivamente seguras y evidentes para los números conocidos (racionales) y fácilmente se extendían para los nuevos números y además, porque no tenían herramientas teóricas para abordarlos; en lugar de esto, el interés se centró en la demostración de la irracionalidad de ciertos números.

Euler, en un artículo titulado *De fractionibus continuis* (1744), dedujo que todo número racional se puede expresar como una fracción continua finita y probó, sustancialmente, que e y e^2 son irracionales, mostrando que éstos se pueden expresar con fracciones continuas infinitas, así:

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}$$

A partir del trabajo de Euler con fracciones continuas, el matemático suizo-alemán Johann Heinrich Lambert (1728–1777) demostró que si x es un número racional diferente de cero, e^x y $\tan x$ no son racionales. Que e^x sea irracional, lleva a que el logaritmo natural de un número racional sea irracional y, que $\tan x$ sea irracional lleva a que $\frac{p}{4}$ y π no sean racionales; resultados demostrados, también por Lambert, en 1761.

En 1768, Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) demostró que una raíz real de una ecuación cuadrática es una fracción continua infinita periódica, con lo cual se puede demostrar la irracionalidad de los números irracionales cuadráticos, encontrando su fracción infinita.

El matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) conjeturó que π no podía ser la raíz de una ecuación polinómica de grado n con coeficientes racionales. Dicha observación llevó a una distinción entre tipos de números irracionales; por una parte, los números algebraicos, raíces de una ecuación algebraica con coeficientes racionales, y por la otra, los números trascendentes, denominados de esta manera por Euler en 1744, por "*trascender el poderío de los métodos algebraicos*". Pese al reconocimiento de esta distinción, no se conocía algún número trascendente a finales del siglo XVIII y ni siquiera se había mostrado su existencia, salvo algunas conjeturas de Legendre y Euler[43].

En 1873, Cantor escribió una carta a Dedekind donde planteaba la posibilidad de que el conjunto de los números reales fuera numerable, pero en 1874 presentó dos demostraciones mediante las cuales mostraba lo contrario. Basado en esto, se demuestra que si el conjunto de los números reales no es numerable y el conjunto de los números algebraicos sí lo es, entonces deben existir números no algebraicos, los llamados números trascendentes, y además deben ser mucho más numerosos que los algebraicos, puesto que su unión con los algebraicos nos completan los números reales. Esta demostración, aunque garantiza la existencia de los números trascendentes, no muestra algún número trascendente.

El matemático francés Charles Hermite (1822 – 1901) demostró, en 1873, que e es trascendente, pero no demostró la trascendencia de π, por considerarlo un trabajo que requería gran esfuerzo. Esta trascendencia fue finalmente demostrada en 1882, por el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852–1939) en el artículo titulado *"Über die Zahl*

[43] Euler conjeturó que el logaritmo de una base racional debía ser racional o trascendente. (Kline, Op. cit.)

p”, cerrando además, cualquier posibilidad de encontrar la cuadratura de un círculo, pues todos los números construibles son algebraicos y π no entra en este conjunto[44].

En el congreso internacional de matemáticas de 1900, celebrado en Paris, Hilbert presentó un listado de 23 problemas importantes que deberían ocupar la atención de los matemáticos durante el siglo XX. En el problema siete, relacionado con números trascendentes, Hilbert pregunta si el número α^{β}, con α algebraico diferente de cero y uno y β irracional cuadrático, es un número trascendente[45]. En 1934 el matemático Alexander Osipovich Gelfond (1906–1968) resolvió el problema y la demostración de la trascendencia de este número se conoce como teorema de Gelfond. Empleando este teorema con la expresión

$$e^{p} = \frac{1}{e^{-p}} = \frac{1}{i^{2i}}$$

se demuestra que e^{π} es trascendente; sin embargo, la trascendencia de e^{e}, π^{π}, π^{e} y, en general, de α^{β}, para α y β trascendentes, aún no se ha podido demostrar (Ibid., p.749)

La aparición de los números trascendentes trajo consigo conclusiones importantes en la comprensión de los números irracionales, el descubrimiento de que los números algebraicos son sólo una clase particular frente a la cantidad inmensa de los números trascendentes y la intención de integrar estos números, racionales e irracionales o algebraicos y trascendentes, en una sola entidad, es decir un solo tipo de número, idea que sería, materializada y formalizada de manos de matemáticos como Cantor, Cauchy, Dedekind, Weierstrass y Hilbert, hacia finales del siglo XIX, con sus teorías de los números reales.

---

[44] Las demostraciones de Hermite y Lindemann son complicadas; en ellas se hace uso de la famosa identidad $e^{ip} + 1 = 0$, atribuida a Euler. Dichas demostraciones pueden verse en NIVEN, I., *Números racionales e irracionales*, The Carus mathematical monographs, The mathematical association of America, 1967, pp. 124-131 y 142-149.

[45] “*En forma geométrica alternativa, Hilbert expresó esto mismo preguntando si en un triángulo isósceles la razón de la base a uno de los lados iguales es trascendente, si se sabe que la razón del ángulo opuesto a la base del ángulo básico es algebraica e irracional* “ (Boyer, op. cit., p. 749)

1.4. CUARTA ETAPA: Formalización del número real.

El desarrollo del álgebra y el análisis durante el siglo XIX, al margen de una estructuración clara y precisa de los números reales, llevaba a una falta de rigor en sus teorías; cuestiones como el estudio de los límites, la continuidad de funciones y las aproximaciones por series de Fourier requerían una comprensión de los números reales y sus propiedades, para justificar, en forma detallada y suficiente, teoremas y demostraciones relacionadas con dichas cuestiones; esta es una de las razones que implicaría un enorme esfuerzo, de parte de prestigiosos matemáticos, por la formalización de los números reales.

Otra razón que motivaría a los matemáticos a fundamentar los números reales, *"fue el deseo de asegurar la verdad de la matemática. Como consecuencia de la creación de las geometrías no euclídeas, la geometría había perdido su status de verdad, pero parecía todavía que la matemática construida sobre la aritmética ordinaria debía ser una realidad incuestionable en cierto sentido filosófico"* (Kline, op. cit., p. 1293).

Un primer intento de reducir el análisis a la aritmética fue desarrollado por Martin Ohm (1792–1872) en su obra *Versuch eines vollständing konsequenten Systems der Mathematik*; sin embargo, la falta de confianza en el manejo de operaciones con series infinitas y la preocupación por una definición precisa del número real, retrasó este proceso de aritmetización y, en consecuencia, se requería una teoría de los números reales que se constituyera en la base aritmética del análisis y el álgebra.

En 1867, Hermann Hankel (1839–1873), alumno de Riemann y profesor en Leipzig, publicó un libro, titulado *Theorie der komplexen zahlensysteme*, donde plantea que "*la condición para construir una aritmética universal es por lo tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles*" (Boyer, op. cit., p. 693); efectivamente, y al igual que con la geometría [46], sólo cuando los matemáticos consideraron los números reales como *estructuras intelectuales* –no reales, en el sentido de

[46] La revolución de la geometría, y con ella la aparición de las geometrías no euclidianas, de manos de matemáticos como Gauus, Lobachewsky y Bolyai se dio gracias a la liberación de las ideas intuitivas del espacio, preconcebidas desde los griegos.

concretas físicamente- y no como las magnitudes intuitivas de Euclides, se logró la aritmetización plena y correcta del análisis.

A finales del siglo XIX, específicamente en 1872, aparecen las teorías formales sobre los números reales, desarrolladas y publicadas por el francés Charles Meray (1835–1911) y los alemanes Karl Weierstrass (1815–1897), Eduard Heine (1821–1881), Georg Cantor (1845–1897) y Richard Dedekind (1831–1916), presuponiendo, para ello, una comprensión del significado y propiedades de los números racionales, a partir de los cuales caracterizaron los números irracionales, los que realmente suponían la principal dificultad en la estructuración formal del número real.

1.4.1. El tránsito hacia la formalización.

Una primera idea acerca del número real fue publicada por uno de los más grandes matemáticos, el francés Agustín-Louis Cauchy (1789-1857), en 1821, en el *Cours*, donde afirmaba que, *"(...) un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él"*, lo cual fue interpretado como una definición de los números irracionales a partir de la noción de límite (Kline, Op. cit., p. 1255) y utilizada por varios matemáticos de la época para relacionar límite con número irracional, lo cual, después de 48 años fue señalado por Méray como un grave *lapsus* de razonamiento, al definir "*el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales*" (Boyer, op. cit., p. 693).

Alrededor de 1830, Bernhard Bolzano, a partir del límite de sucesiones de números racionales, hizo un intento para axiomatizar los números reales y logró establecer la existencia de una cota superior mínima para un conjunto acotado de números reales[47]; su trabajo no fue reconocido, quizá porque, *"si el límite es irracional no tiene existencia lógica hasta que se hayan definido los números irracionales"* (Kline, op. cit., p. 1297).

[47] Teorema base del que hoy se conoce como el Teorema Bolzano-Weierstrass: "todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite"(Boyer, Op. cit., p. 692)

Sin embargo, el primer matemático en divulgar una construcción para los números irracionales fue Sir William Hamilton, quien leyó dos artículos, uno en 1833 y otro en 1835, ante la Royal Irish Academy, artículos que fueron publicados posteriormente con el título *Álgebra as the science of pure time*; en ellos definió los números irracionales como una partición de números racionales (como los definió Dedekind posteriormente); pero no culminó su trabajo.

En 1869, Charles Méray publicó un artículo; en él definió los números reales basado en los números racionales, constituyéndose ésta en la primera teoría sobre los números reales, y precisada en 1872, en su obra *Nouveau precis d'analyse infinitésimale*.

En el mismo año (1872), aparece una obra de H. Kossak, quien trató de presentar la teoría de Karl Weierstrass, sobre los números reales, pero él la desaprobó. Fueron Ferdinand Lindenmann y Eduard Heine quienes dieron a conocer las ideas de Weierstrass, ya que habían sido sus alumnos en Berlín, lugar donde este famoso matemático había dado, en sus clases, una teoría de los números irracionales, desde 1859. Weierstrass, al igual que Méray, se dio cuenta de que para fundamentar el análisis únicamente en el concepto de número, necesitaba definir los números irracionales independientemente del concepto de límite; así, los define, de una manera general, como *conjuntos de racionales más que como meras sucesiones ordenadas*.(Boyer, op. cit., p. 694).

George Cantor había iniciado, en 1871, un trabajo sobre la aritmetización, similar a los de Weierstrass y Méray, al cual Heinrich Heine aportó algunas ideas que conllevaron la presentación de un artículo publicado por Heine en el *Journal für Mathematik*, en 1872, titulado *Die Elemente der Funktionenlehre*, en el cual se expone el trabajo desarrollado por Cantor y Heine. La teoría, es similar a la Méray, soportada en el conjunto de los números racionales, con base en el cual forma *sucesiones fundamentales* y una relación de equivalencia entre ellas; esto le permite definir los números irracionales y en términos generales, números reales[48].

[48] Para ver una explicación un poco más amplia sobre estas teorías, la de Weierstrass y Cantor, ver: SÁNCHEZ, C., *La construcción de los números reales*, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, UPN, Bogotá, 1997, pp. 8-12

Una teoría de los números reales, esencialmente distintas a las hasta ahora enunciadas[49], fue presentada en el mismo año (1872) por Richard Dedekind, quien la publica en su libro *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (en castellano, *Continuidad y números irracionales*); la teoría de Dedekind es la más sistemática, la más abstracta y a su vez, la más simple de las presentadas. Ella demuestra que todo teorema del álgebra, puede expresarse como un teorema sobre números naturales.

Las teorías de Cantor y Dedekind están basadas en las operaciones de los números racionales; ambas construyen los números reales con entes compuestos de infinitos elementos, ambas comparan la geometría con la aritmética, ambas comparten la idea de que la continuidad del espacio no se puede demostrar y por tanto debe tomarse como axioma.

Las construcciones de Weierstrass, Cantor-Heine y Méray, comparten el uso de las series o las sucesiones para la construcción de los números irracionales, mientras que Dedekind usa conjuntos y orden. Las sucesiones son objetos con una estructura más compleja que las cortaduras, y en el caso de las *sucesiones fundamentales* se presuponen también ciertas propiedades topológicas.

Aunque todas las construcciones de los números reales son equivalentes, si las construcciones de Cantor, Weierstrass y Dedekind se hacen usando un conjunto distinto al de los números racionales, los resultados ya no coinciden.

1.4.2. Construcción de los números reales como límite de sucesiones de números racionales: Cauchy-Méray.

Como ya se enunció, Cauchy definió el límite de una sucesión como un número real y el número real como el límite de una sucesión de números racionales; es decir, identifica el número real con el valor al cual converge la sucesión; sin embargo, en la actualidad se encuentra una presentación de los números reales atribuida a él, en la cual se asocia el

[49] Salvo a la iniciada por Hamilton.

número real a la sucesión misma, pero tal vez[50], esta precisión es realizada posteriormente por Méray quien utilizó solamente el criterio Bolzano-Cauchy[51],

> *En un sentido general, Méray consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un"número ficticio" como su "límite ficticio". Estos números ficticios pueden ordenarse, como demostraba, y son esencialmente lo que conocemos como los números irracionales. Méray no es muy preciso acerca de si su sucesión convergente es o no el número mismo* (Ibid., p. 694).

Esta construcción de números reales está basada en sucesiones de Cauchy de números racionales, fundamentadas en la teoría de convergencia de sucesiones de números.

Una sucesión, digamos $\{x_n\}$, es de Cauchy en el conjunto de los números racionales si y sólo si para todo $e > 0$, e racional, se puede encontrar un número entero $N > 0$ tal que si $m > N$, $n > N$, entonces $|x_n - x_m| < e$, criterio equivalente a la definición usual de convergencia de sucesiones[52], que enuncia:

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a un número real[53] l, si y sólo si para todo $e > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - l| < e$.

Como ya se indicó, las sucesiones consideradas por Cauchy eran de números racionales; sin embargo, el número al cual convergen no es necesariamente un número racional; por ejemplo:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \ldots,\ \frac{a_{n+1} + 2b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}},\ \ldots \quad \text{donde } a_1 = b_1 = 1$$

[50] Esta construcción no aparece reconocida en los libros consultados de historia de la matemática ni en textos afines, pero si es presentada en libros de análisis matemático o cálculo como construcción de Cauchy (Spivak, 1996, p. 825; Lelong, 1980, pp. 2 - 9)

[51] El criterio Bolzano-Cauchy, conocido como Criterio de Cauchy para series, enuncia que *"La serie Σa_n converge si y sólo si, para cada $e > 0$ existe un entero N tal que $n > N$ implica que $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < e$, para cada $p = 1, 2, \ldots$"* (Apóstol, 1977, p. 227)

[52] Para la demostración de esta equivalencia, ver, por ejemplo, Donado A., et al. (1997) *Sucesiones de números reales*, Universidad Pedagógica Nacional, o Lelong (1980)

[53] Pues el conjunto de los números reales es completo.

converge a $\sqrt{2}$. Así, toda sucesión de Cauchy de números racionales converge a un número real, incluso, dos o más sucesiones pueden converger a un mismo número real; esto es:

$$\left\{2,\, 3, \frac{8}{3}, \frac{30}{11}, \frac{144}{53}, ...\right\} \text{ converge a } e\text{, al igual que } \left\{2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120} ...\right\}$$

de hecho, es posible hallar infinitas sucesiones que convergen a un mismo número. Con base en esto, es necesario determinar cuándo dos de estas sucesiones son equivalentes; es decir, convergen al mismo número real, para ello se enuncia, en términos modernos, que:

$\{x_n\} \approx \{y_n\}$ si y sólo si para todo $e > 0$, e racional, se puede encontrar un número entero $N > 0$ tal que para $n > N$, entonces $|x_n - y_n| < e$.

De donde se define el conjunto de los números reales como aquel formado por las clases de equivalencia determinadas por la anterior relación; en otras palabras, un número real es una familia de sucesiones de Cauchy equivalentes entre sí; simbólicamente, si α es un número real al que convergen una clase de sucesiones, de las cuales se elige como representante a la sucesión $\{x_n\}$, se escribe $\alpha = [\{x_n\}]$.

Si $a = [\{x_n\}]$ y $b = [\{y_n\}]$ son números reales, $a + b = [\{x_n + y_n\}]$ y $a \times b = [\{x_n \times y_n\}]$

de manera análoga se define el producto. Con base en estas definiciones, las propiedades de los números racionales y de las sucesiones, se demuestran las propiedades de los números reales, con dichas operaciones.

1.4.3. Construcción de Weierstrass.

Weierstrass, al igual que Méray consideraba que la definición de número irracional debía ser independiente del concepto de límite, identificando para ello una sucesión convergente con el número límite; afirma que un número no es el límite de una sucesión $\{a_n\}$ sino es la sucesión misma asociada a la serie Σa_n.

Más precisamente, Weierstrass parte de un conjunto de números racionales, al que denomina un agregado, de tal forma que al sumar cualquier cantidad de elementos del conjunto, su suma no supera un límite dado (Romero, op. cit., p.62). Podemos decir que esta construcción es similar a de Méray y las diferencias con ella son sutiles.

1.4.4. Construcción de Cantor-Méray-Heine: intervalos encajados

Una construcción, también basada en sucesiones de números racionales, es debida a Cantor, que como ya se indicó, fue quien inventó una teoría, similar a la propuesta por Méray, basándose en la de Cauchy; sin embargo, Heine la publicó haciendo algunas simplificaciones, por ello hacemos tal reconocimiento. Cantor define número real a partir de clases de equivalencia de intervalos encajados, basándose en sucesiones de números racionales, así: *Un par de sucesiones monótonas contiguas*[54] *de números racionales definen un número real* $\alpha = \{a_i; a'_i\}$*, con la condición de que* $\{a_i; a'_i\} = \{b_j; b'_j\}$*, si* $a_i \le b'_j$*,* $b_i \le a'_j$ *para cualquier par de subíndices i, j.* (Rey, 1958, p. 100, pie de página nuestro).

donde, dos *sucesiones monótonas son contiguas* si, para un par de sucesiones cualesquiera de números racionales, se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) Una de las sucesiones es monótona creciente, digamos $\{a_i\}$, y la otra, $\{a'_i\}$, es monótona decreciente.
ii) Para todo a_i, se tiene que $a_i < a'_i$.
iii) $a'_i - a_i < \varepsilon$, para cualquier número positivo ε, a partir de algún i.

Con dichas condiciones tenemos que los términos correspondientes en cada una de las sucesiones determinan intervalos encajados $I_i = \{a_i; a'_i\}$, tales que su amplitud puede ser tan

[54] La presentación de la teoría de Cantor para los números reales expuesta aquí, a partir de sucesiones monótonas contiguas, es la versión actual de dicha teoría, debida, en parte, a exposiciones de R. Lipschitz (1877), C. Arzelà (1883) y P. Bachmann (1892) (Pastor, 1958, p. 106).

pequeña como se desee para algún i suficientemente grande, como se muestra en la siguiente figura:

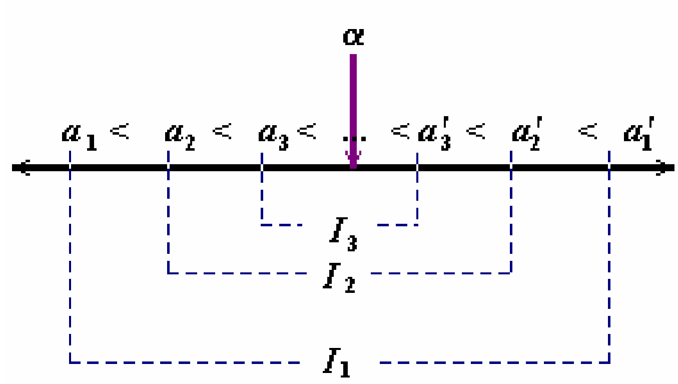


Figura 10

Y existe un único número α, mayor o igual a cada uno de los a_i y, a su vez, menor o igual a cada uno de los a'_i, de cada uno de los intervalos encajados definidos por las sucesiones, que bien puede ser un número racional o no, lo cual llevó a Cantor a la creación del número irracional y con ésta, a la definición de número real. Precisamente en esta sutileza se encuentra la esencia de la continuidad, conocido como postulado de continuidad de la recta: *Dada una sucesión de intervalos encajados $I_i = \{a_i; a'_i\}$, existe siempre un punto* a *perteneciente a todos ellos*. (Ibid., p. 101)

En palabras de Cantor:

> *Si esta distancia tiene una relación racional con la unidad de medida, entonces se expresa mediante una cantidad numérica en el dominio A [de los racionales]; en otro caso, si el punto se conoce a través de la construcción, siempre es posible dar una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, que tenga la propiedad* lím $(a_{n+m} - a_n) = 0$[55] *y que se relacione con la distancia en cuestión de tal manera que los puntos de la recta a los que se asignan las distancias $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se aproximan infinitamente al punto a determinar, conforme n aumenta. Esto lo expresamos diciendo la distancia desde el punto 0 al punto a determinar, es igual a b, donde b es la cantidad correspondiente a la sucesión. Para completar la conexión presentada en el dominio de las cantidades con la geometría de la línea recta, sólo debemos añadir un axioma que simplemente diga que,*

[55] Esta propiedad corresponde a la condición iii), enunciada para las sucesiones monótonas contiguas.

recíprocamente, toda cantidad numérica también tiene un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esa cantidad (en el sentido que hemos precisado más arriba). Llamo a esta proposición axioma porque su naturaleza no puede ser universalmente probado (Cantor, citado por Crossley, 1987, p. 147, el pie de página es nuestro)

El número real 0 es un punto fijo sobre la recta que determina dos direcciones sobre ella, una positiva y una negativa, de tal manera que las aproximaciones por defecto son negativas y las aproximaciones por exceso son positivas. Un número $\alpha = \{a_i; a'_i\}$ es positivo ($\alpha > 0$), si existe $a_i > 0$ para algún i, y negativo ($\alpha < 0$), si existe $a'_i < 0$ para algún i y $\alpha > \beta$ si $\alpha - \beta > 0$.

Finalmente, y a partir de lo anterior, se definen las operaciones como sigue: Para dos números reales cualesquiera, $\alpha = \{a_i; a'_i\}$ y $\beta = \{b_i; b'_i\}$,

$\alpha + \beta$ corresponde al número $\gamma = \{a_i + b_i; a'_i + b'_i\}$

$\alpha \times \beta$ corresponde al número

$$
\begin{aligned}
&\gamma = \{a_i \times b_i;\ a'_i \times b'_i\},\ \text{si } \alpha > 0 \ \text{ y } \beta > 0\\
&\gamma = -\{|a'_i| \times b_i;\ |a_i| \times b'_i\},\ \text{si } \alpha < 0 \ \text{ y } \beta > 0\\
&\gamma = -\{a_i \times |b'_i|;\ a'_i \times |b_i|\},\ \text{si } \alpha > 0 \ \text{ y } \beta < 0\\
&\gamma = \{|a'_i| \times |b'_i|;\ |a_i| \times |b_i|\},\ \text{si } \alpha < 0 \ \text{ y } \beta < 0\\
&0,\ \text{si } \alpha = 0 \ \text{ o } \ \beta = 0
\end{aligned}
$$

Y con base en estas definiciones, se verifican las propiedades algebraicas y de orden, de los números reales; la completez se da con el axioma de continuidad de Cantor.

1.4.5. Un camino distinto para la formalización: Cortaduras de Dedekind

La propuesta de construcción de los números reales de Richard Dedekind inicia con una comparación entre los números racionales y la recta geométrica, para lo cual hace una breve presentación de los números racionales:

1. Las cuatro operaciones fundamentales están definidas para todo par de números racionales con excepción de la división por cero.
2. Dados dos números racionales cualesquiera está definido un orden entre ellos.
3. Dado cualquier número racional existen infinitos números racionales mayores que él e infinitos números racionales menores que él.
4. Cada punto P de una línea recta produce una separación de la misma en dos porciones, de manera que cada punto de una parte a la izquierda de cada punto de la otra parte.

La recíproca de la última afirmación permitió a Dedekind cuestionarse sobre la diferencia entre los números racionales y las magnitudes geométricas continuas; en esencia, sobre el significado de la continuidad geométrica, y se dio cuenta de que la idea que tenían matemáticos contemporáneos y anteriores como Galileo, Leibniz y Bolzano, sobre continuidad, estaba errada, ya que ellos llamaban continuidad a lo que hoy conocemos como densidad; esto es, que entre dos puntos cualesquiera siempre hay otro entre ellos.

A raíz de esta distinción, Dedekind encuentra que el secreto de la continuidad está en que si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces *existe un único punto* que produce esta separación de la línea recta en dos pedazos; reconoce además que esta afirmación es indemostrable y la toma como axioma.

Seguidamente, copia esta noción de continuidad al conjunto discontinuo de los números racionales (Newman, op. cit., pp. 119-128) para completarlo hasta formar un conjunto *continuo* como la recta; es decir, que los números racionales se pueden extender para construir el conjunto continuo de los números reales, suponiendo lo que ahora se conoce como axioma de Cantor-Dedekind[56].

Dedekind hace una separación de **Q** en dos clases disyuntas A_1 y A_2, las cuales nota como (A_1, A_2), a lo cual llama cortadura, tal que todos los elementos de A_1 son menores que

[56] El axioma de Cantor-Dedekind dice: "Los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales" (Boyer, op. cit., p. 695)

los elementos de A_2; sin embargo existen cortaduras en las cuales A_1 no tiene máximo y A_2 no tiene mínimo. Dedekind da como ejemplo todas las cortaduras definidas por los enteros D tales que no son cuadrados de números enteros y dice que para cada D existe un n natural tal que:

$$n^2 < D < (n+1)^2$$

Considerando $A_1 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que $r^2 \in D\}$

$A_2 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que $r^2 \in D\}$

Así, A_1 y A_2 no tienen elemento máximo ni elemento mínimo respectivamente, luego esta cortadura no pudo ser generada por un racional. Con esto, Dedekind crea un nuevo número al que denomina irracional y simboliza por a, y lo denota como (A_1, A_2); a partir de esto, Dedekind define con cortaduras a los números reales, bien sean racionales o irracionales; así:

- Si p es un número racional, éste se representa como (A_1, A_2) de tal manera que:

  $A_1 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que $r < p\}$

  $A_2 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que $r \geq p\}$

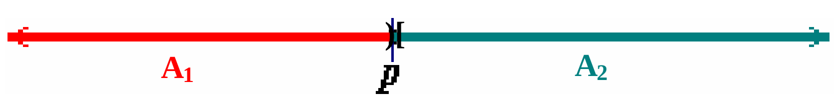


Figura 11

O bien, $A_1 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que r £ $p\}$

$A_2 = \{r \in \mathbf{Q}$ tales que $r > p\}$

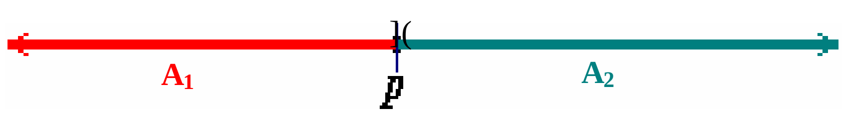


Figura 12

- Si p es un número irracional, éste se representa como (A_1, A_2) de tal manera que:

  $A_1 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r < p\}$

  $A_2 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r > p\}$

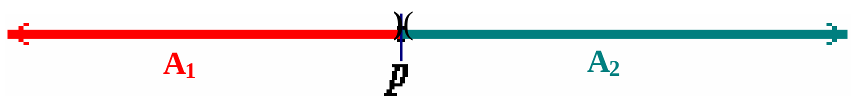


Figura 13

Además da las siguientes definiciones:

i. *Dos cortaduras son iguales si sus componentes son iguales; esto es:*

$$(A_1, A_2) = (B_1, B_2) \text{ si y sólo si } A_1 = B_1 \text{ y } A_2 = B_2$$

ii. *Orden:*

Si $(A_1, A_2) \neq (B_1, B_2)$ existen dos posibilidades:

a) $(A_1, A_2) < (B_1, B_2)$ si existe un elemento de B_1 que no está en A_1.

b) $(A_1, A_2) > (B_1, B_2)$ si existe un elemento de A_1 que no está en B_1.

iii. *Suma:*

$(A_1, A_2) + (B_1, B_2) = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$; siendo

$A_i + B_i = \{x + y \text{ tales que } x \in A_i, y \in B_i\}$ i =1,2.

iv. *Producto:*

Dado el orden, puede definir lo que es una cortadura a (o número real) positiva; simplemente es una mayor que cero. Con esta noción se puede introducir la función valor absoluto como es usual y así el producto se define por casos así:

1) si $a = 0$, $b = 0$ entonces $ab = 0 \cup \{st | s \in \alpha, t \in \beta\}$

2) si $a = 0$, $b \leq 0$ entonces $ab = -a\,|\,b\,|$

3) si $a \leq 0$, $b = 0$ entonces $ab = -\,|\,a\,|\,b$

4) si $a \leq 0$, $b \leq 0$ entonces $ab = |\,a\,|\,|\,b\,|$

Dedekind demuestra que se cumplen las propiedades en R análogas a I, II, III de Q y además afirma y demuestra la continuidad de la recta con su famoso teorema *"Si el sistema R de todos los números reales se rompe en dos clases U_1U_2 tales que todo número **a_1** de la clase U_1 es menor que cada número **a_2** de la clase U_2 entonces existe uno y solo un número por el cual esta separación se produce"* (Dedekind,, 1888, p. 90).

Dedekind hace énfasis en que *"el número irracional no es la cortadura misma, sino algo distinto, que corresponde a la cortadura y que la produce. De modo parecido, aunque los números racionales generan cortaduras, no son lo mismo que ellas"* (Kline, op. cit., p. 1301).

1.4.6. Presentación axiomática de los números reales.

Las anteriores teorías formales del número real se basan en las operaciones y propiedades de los números racionales, los cuales, a su vez, se fundamentan en los números naturales; el matemático alemán David Hilbert (1862–1943) denominó esta manera de acceder a los números reales método genético, diciendo que aunque fuera un buen camino desde el punto de vista pedagógico (Kline, op. cit., p. 1306) él prefería otro enfoque, más seguro desde el punto de vista lógico y planteó, a finales del siglo XIX (1899), un sistema de axiomas[57] para caracterizar a los números reales, en el Apéndice VI de su obra Fundamentos de Geometría.

Hilbert supone la existencia de un sistema de entes –números– y de unas relaciones entre ellos que se ajustan a ciertas condiciones, los axiomas, los cuales distribuye en cuatro grupos,

---

[57] Una presentación axiomática consta de unos *términos no definidos*, *conceptos primitivos* no susceptibles de definición y un *conjunto de axiomas* o *proposiciones primeras* (Rey, 1952, p. 10), relaciones entre los términos no definidos que se aceptan como ciertas; éstos constituyen el punto de partida de una teoría matemática en la cual se plantean otras afirmaciones que se deducen de dichos axiomas, los teoremas; dicho de otra forma, los teoremas se demuestran a partir de los axiomas siguiendo una manera de razonar, basada en la lógica, generalmente, la lógica bivalente o lógica clásica.

a saber: Axiomas de Enlace (6), Axiomas de Cálculo (6), Axiomas de Ordenación (4) y Axiomas de Continuidad (2)[58].

I. Axiomas de enlace

I_1. A partir del número a y el número b se obtiene por adición un determinado número c; simbólicamente

$$a + b = c \qquad \text{o} \qquad c = a + b$$

I_2. Si a y b son números dados, existe uno y sólo un número x y existe también un y sólo un número y tales que:

$$a + x = b \qquad \text{o} \qquad y + a = b$$

I_3. Hay un número determinado, denotado por 0, tal que para cualquier a

$$a + 0 = a \qquad \text{o} \qquad 0 + a = a$$

I_4. A partir del número a y el número b se obtiene por otro método, la multiplicación, un número determinado c; simbólicamente

$$ab = c \qquad \text{o} \qquad c = ab$$

---

[58] En la presentación axiomática actual de los números reales, los axiomas se clasifican en tres grupos: *Axiomas de campo* que hacen referencia a las propiedades básicas que cumplen las dos operaciones definidas: la adición y la multiplicación (equivalentes a los *axiomas de enlace* y *de cálculo*); *axiomas de orden* que establecen los criterios para comparar números, identificando cuándo un número es mayor, menor o igual que otro y *axioma de completitud*, con el cual se introducen los números irracionales y se establecen las propiedades de continuidad de los números reales (Para mayor información sobre los axiomas ver p.ej. Apóstol T. (1988), Calculus, pp. 22-34). No tenemos vestigios de quien o quienes formularon esta presentación axiomática de R, aunque parece ser de autoría del grupo Bourbaki, fundamentados en los de Hilbert, dado que ellos fueron sus discípulos.

I_5. Dados dos números arbitrarios, a y b, si a no es 0, existe uno y sólo un número x, y también uno y sólo un número y, tales que

$$ax = b \qquad \text{o} \qquad ya = b$$

I_6. Existe un número determinado, denotado por 1, tal que para cada a tenemos

$$a \cdot 1 = a \qquad \text{o} \qquad 1 \cdot a = a$$

II. Axiomas de cálculo

II_1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

II_2. $a + b = a + b$

II_3. $a\ (bc) = (ab)\ c$

II_4. $a\ (b + c) = ab + ac$

II_5. $(a + b)\ c = ac + bc$

II_6. $ab = ba$

III. Axiomas de orden

III_1. Si a y b son dos números diferentes, entonces uno de ellos es siempre mayor que el otro; este último se dice que es más pequeño que el primero; simbólicamente

$$a > b \qquad \text{y} \qquad b < a$$

III_2. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

III_3. Si $a > b$, entonces siempre es cierto que

$$a + c > b + c \qquad \text{y} \qquad c + a > c + b$$

III_4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $ca > cb$

IV. Axiomas de continuidad

IV_1. (Axioma de Arquímedes) Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números arbitrarios, entonces es posible siempre sumar *a* consigo mismo un número suficiente de veces para tener

$$a + a + a + \ldots + a > b$$

IV_2. (Axioma de completitud) No es posible añadir al sistema de los números ninguna colección de cosas de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas precedentes; dicho en pocas palabras, los números forman una colección de objetos que no pueden ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes.

Como se observa, con el último axioma, Hilbert impone la completez de los números reales aduciendo a que *"los números forman un sistema de entes que no es susceptible de ampliación alguna"* (Campos, 1994, p. 487) diferente a las presentaciones usuales –incluyendo la axiomática actual– de este axioma o principio, en las cuales se agregan nuevos elementos a los números racionales para caracterizar el conjunto completo de los números reales.

Hilbert había señalado en sus *Fundamentos de Geometría* que un sistema axiomático se caracterizaba por la compleción, la sencillez y la compatibilidad e independencia de los axiomas. Sin embargo, respecto a los axiomas de los números, muestra que éstos no son del todo independientes, por ejemplo, a partir de las propiedades asociativa de la adición, modulativa de la multiplicación y distributiva de la multiplicación respecto a la adición, demuestra la propiedad conmutativa de la adición, como sigue (Ibid., p. 488):

$$(a + b)(1 + 1) = (a + b)1 + (a + b)1 = (a + b) + (a + b)$$

Por otro lado,

$$(a + b)(1 + 1) = a\,(1 + 1) + b\,(1 + 1) = (a + a) + (b + b)$$

de donde,

$$(a+b)+(a+b)=(a+a)+(b+b)$$
$$a+(b+a)+b=a+(a+b)+b$$
$$b+a=a+b$$

Pese a la eficacia del sistema axiomático para fundamentar la aritmética, el álgebra y el análisis, la demostración de la no contradicción (consistencia) del sistema axiomático constituyó un problema, planteado por Hilbert, en París, en 1900 (segundo problema) y que sólo fue resuelto, en 1931, por el matemático austriaco Kurt Gödel, con lo cual los números reales existen desde el punto de vista matemático (Kline, Op. cit., p. 1308).

En términos modernos, un conjunto, con dos operaciones y una relación de orden, que cumpla los axiomas de campo, orden y completez, se denomina el conjunto de los Números Reales, y es *un campo ordenado y completo*; de hecho, es el *único* conjunto con estas tres propiedades, salvo isomorfismos.

2. ESTATUS MATEMÁTICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL.

Dada la evolución histórica del concepto de número real y su relación con diversas situaciones y otros conceptos matemáticos, es evidente la lentitud en el proceso de institucionalización del número real como concepto matemático, presentando, a través de la historia tres estatus diferenciados, de acuerdo con la perspectiva teórica de Chevallard, a saber:

2.1. El número real como noción protomatemática.

En este estatus, respecto a nuestro objeto de estudio, se pueden distinguir dos contextos. El primero corresponde a la matemática griega de la antigüedad, en la cual, se reconocía la existencia de unos entes diferentes a los números naturales, no aceptados como números, sino asociados a la geometría como magnitudes inconmensurables con la unidad. En esta época la idea de número real (irracional) no emerge, pues el problema de la inconmensurabilidad fue abordado únicamente desde la geometría, aunque, en esencia, ésta corresponde al concepto de número irracional en una de sus representaciones, la geométrica. Esta idea se mantuvo por unos 2000 años (s. VI a.C. – s. XIX) y fue motivo de controversias en la comunidad matemática, pues varios personajes usaron esto como argumento para justificar la no aceptación de los irracionales como números.

El segundo, aparece en el Oriente, civilizaciones como las de los babilonios, egipcios, chinos, indios y árabes usaron además de los números naturales, las fracciones y los irracionales, en actividades de cálculo y solución de problemas, sin ocuparse de reflexiones de tipo ontológico acerca de la naturaleza del número; así hallaron propiedades, aproximaciones y maneras de operar con los números irracionales sin reconocer su carácter distinto (respecto a otros tipos de números).

2.2. El número real como noción paramatemática.

El estatus paramatemático del número real es difícil de determinar, ya que en una misma época hay características de estatus tanto para como protomatemático; sin embargo, consideramos, por ubicar algún período histórico, que este nivel se inicia en la edad moderna, puesto que desde principios del siglo XVI se empiezan a usar los irracionales (con representaciones simbólicas: operatorias, “decimales” o geométricas: magnitudes) con aparente libertad, sin tener acuerdo frente a si éstos eran números o no, pues ya en esta época estaba dicha discusión.

En primer lugar, cuando se vio la necesidad de cambiar la notación para las fracciones -sexagesimales, unitarias o comunes- usadas en los cálculos de mercaderes y comerciantes de diferentes lugares durante muchos años[59], la concepción sobre número se amplía, incluyendo ahora, además de los enteros, las fracciones decimales popularizadas con la obra de Stevin, quien no sólo las usa con fines meramente comerciales, sino que además las emplea como herramienta en lo matemático, para aproximar irracionales, pues Stevin los consideraba como números, cuestión que otros matemáticos de la misma época no aceptaban aún.

En segunda instancia, matemáticos como Cardano utilizaban irracionales como solución de ecuaciones cúbicas y cuárticas, empleando básicamente la notación algebraica, también halló numerosas propiedades para algunos números irracionales, por ejemplo, racionalizaba fracciones con raíces cúbicas; sin embargo, no hallamos muestras de sí este genio matemático aceptaba o no a las raíces inexactas (cuyo resultado no es un número natural) como números.

A lo largo de este siglo y el siguiente, se mantuvieron las dos posturas frente a la aceptación de los irracionales como números, mientras algunos los consideraban como tales otros continuaban asociándolos con las magnitudes geométricas; sin embargo, estas posiciones encontradas no impidieron que se desarrollaran variadas representaciones para los números irracionales como las fracciones continuas, aproximaciones decimales y series, las cuales posteriormente sirvieron de base para la teorización de los números reales.

Durante el siglo XVIII eran más quienes reconocían los irracionales como números que los que no; algunos de los matemáticos a favor definían el número desde la geometría, con lo cual incluían los naturales, las fracciones positivas y los irracionales. Aun así, durante este siglo se demostró la irracionalidad de algunos números basados principalmente en cuestiones algebraicas y analíticas; de hecho en este período histórico el álgebra ganó su reconocimiento como rama fundamental de las matemáticas; este elemento fue importante en el proceso de aceptación y manipulación de los números reales, pues ante la desconfianza en el

[59] En la edad antigua, en general, las fracciones eran evadidas en la realización de cuentas, preferían crear submúltiplos, por ejemplo en lo que respecta a las unidades de medida, para usar solamente números enteros; luego se usaban las fracciones unitarias, sexagesimales o comunes para realizar cálculos.

razonamiento geométrico con la aparición de las geometrías no euclidianas, el álgebra se convirtió en la única opción para fundamentar las matemáticas.

Por otra parte, en el desarrollo del cálculo se emplearon los números reales con cierta soltura, como herramienta en diversos desarrollos analíticos, pese a la carencia de una definición formal para ellos; precisamente esto llevó a una falta de rigor en las teorías del cálculo y a la preocupación por formalizar el concepto de número real, asunto que fue consolidado a finales del siglo XIX.

2.3. El número real como noción matemática.

El número real como noción matemática tiene dos partes, una *constructiva* y otra *axiomática*; la primera, aparece a finales del siglo XIX (1872) con las teorías formales presentadas por Cauchy, Méray, Cantor, Weierstrass y Dedekind, en su intento por aritmetizar el análisis. Para esta época, los números reales eran ya totalmente aceptados como números en sí mismos y existía la preocupación por definirlos, independientemente de la geometría, de manera que sirvieran de fundamento al análisis y al álgebra; así, se constituyeron como un objeto de estudio en las matemáticas, de hecho, todas las construcciones presentadas eran meramente intelectuales, aisladas de toda percepción sensible. No obstante, no se lograron desprender totalmente de la intuición geométrica, pues tanto Cantor como Dedekind reconocieron que la continuidad de la recta era un buen modelo para expresar la completez de los números reales.

La segunda parte muestra el máximo nivel de estatus matemático del número real con la formalización axiomática, caracterizando los números reales como entes abstractos que cumplen ciertas propiedades, independientes incluso de la percepción geométrica, y tomando un sitio central dentro de los conceptos básicos del análisis y del álgebra.

3. CONCEPCIONES HISTÓRICAS DEL NÚMERO REAL[60].

A partir del estudio anterior, es posible determinar dos concepciones generales, que describen el punto coyuntural de la evolución histórica de los números reales, la aceptación y la no aceptación de los irracionales como números; sin embargo, es complejo ubicarlas, pues en una misma época se encuentran ambas concepciones, entrecruzadas en diferentes contextos matemáticos y socio-culturales; además, en varias ocasiones es imposible decidir, con cierto grado de certeza, si permanecía una concepción o la otra en algún personaje o cultura. Establecimos entonces cinco concepciones históricas, más específicas, no necesariamente en orden cronológico ni disyuntas entre sí, que como es obvio, están permeadas por las dos anteriores.

3.1. Tratamiento aritmético de los números reales (C1)

Esta concepción abarca las edades antigua y media en las civilizaciones Orientales y el renacimiento italiano con el *Ars Magna* de Cardano.

Según cuenta la historia, civilizaciones como la babilonia, egipcia, china, india y árabe no se preocuparon por el significado de los números (naturales, fraccionarios e irracionales) aunque los usaban muy eficientemente en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos, los primeros, generalmente estaban ligados a solución de problemas de tipo astronómico, comercial y de medición (de tiempo, longitudes) y los otros, en la solución de ecuaciones, principalmente, de segundo grado. De manera similar Cardano utiliza números irracionales algebraicos (incluso complejos) como raíces de ecuaciones de tercer y cuarto grado, pero no tenemos vestigios de si él los aceptaba como números o consideraba dichas expresiones como cantidades, operaciones sin resolver o si no eran de su interés estas acepciones. De esta descripción se deduce que, de acuerdo a la tipificación de Sfard (1991), C1 corresponde a una concepción operacional.

---

60 Sugerimos que el lector no aborde esta sección sin haber leído antes el Estudio histórico del número real y el Estatus matemático del concepto en cuestión.

Las representaciones asociadas a esta concepción son de tipo simbólico y corresponden a la notación operatoria, específicamente a:

- Expresiones en forma de fracción (unitaria, sexagesimal y común) en las diferentes notaciones mostradas en el apartado 3.1.2.1.
- Expresiones con radicales

3.2. Números reales como magnitudes geométricas (C2).

Inicia en la antigua Grecia y se extiende hasta el trabajo desarrollado por Stevin en la edad moderna, pasando por la época de oro de las matemáticas griegas; sin embargo, en años posteriores se halla aún esta concepción en matemáticos como Pascal.

La idea de número como cantidad discreta, de los pitagóricos, llevó a la distinción entre números naturales, las fracciones y los irracionales, los dos últimos considerados como magnitudes geométricas; esta idea llevó a consideraciones de carácter filosófico apareciendo así, cuestiones como las paradojas de Zenón las cuales mostraban la imposibilidad de hacer coincidir la pluralidad discontinua y la pluralidad de puntos de los pitagóricos, con la realidad concreta y continua del mundo sensible. De hecho, en la obra de los clásicos griegos, excepto Platón y algunos de sus discípulos, se encuentra la diferencia entre la cantidad de la aritmética (números naturales) y la magnitud de la geometría (fracciones y números irracionales)[61], razón por la cual los números reales, como tales, no tuvieron cabida en este contexto. Esta concepción aún se presenta en el siglo XVII, con las posiciones de matemáticos como Pascal y Barrow (sección 3.1.3) y en el siglo XVIII con la definición de número de Newton en su *Aritmetica Universalis*.

Como se puede dilucidar, el concepto de número real en C2 está asociado al proceso de medir, obteniendo segmentos conmensurables o inconmensurables con la unidad según sea

[61] ver, p. ej., secciones 3.1.1.4. y 3.1.1.5.

fracción o irracional; y al de contar si se trata de números naturales; es así como esta concepción es de tipo operacional.

Las representaciones presentes en C2 son verbales y geométricas; las obras griegas utilizan la retórica para expresar propiedades de las magnitudes al igual que dibujos para representar expresiones como puede verse en el apartado 3.1.1.5.

3.3. El número real como cantidad continua y discreta (C3).

Este punto de vista se presentó, fundamentalmente, en el siglo XVI con la obra del matemático flamenco Simon Stevin y persiste en matemáticos como Wallis (1685) y Descartes (1628), defensores de los irracionales como números. No obstante, en la obra de Platón y algunos de sus discípulos se vislumbra ya esta posición (ver apartado 3.1.1.3)

Stevin, en su obra *Le premier livre d'arithmetique* (1634), señala que *"El número es aquello por lo cual se expresa la cantidad de cada cosa*" y más adelante que *"El número no es una cantidad discontinua"* (Stevin, 1585, pp. 1-2, citado por Waldegg, Op. cit., p. 9), con esto el número aparece asociado a la idea de cantidad discreta y continua, eliminando la dicotomía entre continuo y discreto presente en los escritos griegos; además Stevin establece la unidad como número y la posibilidad de dividirlo e introduce una nueva idea de número en relación con sus operaciones, pues para él, la naturaleza del número está determinada por las operaciones que se realizan entre ellos; podría decirse que éste es un primer acercamiento a la idea de número del álgebra moderna.

Dado que, como afirma Waldegg (op. cit., p. 8), *"Stevin extrae su concepto de número de la experiencia cotidiana y profesional, como una extensión de la práctica generalizada de medir"*, esta concepción, al igual que las anteriores, es operacional.

En cuanto a las representaciones, prima la notación simbólica, debido a los trabajos predecesores y posteriores a Stevin, en especial, la notación decimal que, como se lee en el apartado 3.1.2.1., tuvo un sinnúmero de presentaciones.

3.4. Expresiones algebraicas y analíticas para números irracionales (C4).

C4 corresponde a los siglos XVII y XVIII cuando, matemáticos como Bombelli, Cataldi, Brouncker, Viète, Wallis y Euler, usan fracciones continuas y series para expresar algunos números irracionales, incluso al siglo XIX cuando en 1844 y 1873 aparecen las demostraciones de la trascendencia de algunos de ellos.

Aquí ya se consideran los irracionales como números aunque no se encontraran definidos oficialmente, la historia no evidencia discusiones al respecto; en cambio sí muestra sorprendentes e ingeniosas expresiones para varios números irracionales como los famosos trascendentes π y e y algunos cuadráticos; algunas de las cuales fueron útiles para demostrar su irracionalidad.

Al ser expresados los números irracionales como series o fracciones continuas infinitas, pueden ser interpretados como el resultado de un proceso en relación con el infinito potencial, razón por la cual ubicamos a esta concepción como operacional.

Las representaciones usadas en este caso son simbólicas en su notación operatoria con las fracciones continuas, las series y el uso de letras o caracteres especiales para nominar algunos números.

3.5. Número real como objeto matemático (C5)

Esta concepción se manifiesta a finales del siglo XIX con las teorías formales de los números reales, de tipo constructivo, y en el siglo XX con la axiomatización de éstos (ver apartado 3.1.4). Mediante estas teorías el número real es ya un objeto matemático en sí mismo y definido oficialmente, en consecuencia esta concepción es de tipo estructural.

Las representaciones usadas para los números reales varían para cada una de las teorías presentadas, aunque, como es obvio, todas son simbólicas:

- En el caso de Dedekind, cortaduras representadas con letras griegas o como pares de conjuntos y éstos mediante letras del abecedario.
- Con Cauchy, sucesiones.
- En la teoría de Weierstrass, agregados (conjuntos de números racionales)
- Para Cantor, intervalos encajados.
- Y en la presentación axiomática, caracteres o letras que representan los números.

Vale señalar que tanto Cantor como Dedekind usaron, además, la interpretación geométrica de la recta para caracterizar la continuidad de los números reales.

En la siguiente figura se muestra un esquema que resume los aspectos más importantes de las concepciones históricas, antes descritas:

Figura 14

BIBLIOGRAFÍA

AABOE, A. (1964) *Matemáticas: Episodios Históricos.* Biblioteca de Matemática Contemporánea. Editorial Norma. Cali.

ARISTÒTELES. (350 a. C. aprox.) *Metafísica*. Reimpreso en 1992. Ediciones Universales. Bogotá.

BELL, E. (1949) *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México.

BOYER, C. (1986) *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza Universidad. Madrid.

CAJORI, F. (1930) *A history of matehematics*. Chelsea Publishing Company. New York.

CAMPOS, A. (1994) *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

COLETTE, J. P. (1985) *Historia de las Matemáticas*. Vol. 2. Siglo XXI Editores. Madrid.

COOKE, R. (1997) *The history of mathematics.* A Wiley-interscience publication. Estados Unidos.

CORIAT, M. et al (2000) *Representación de los números reales en la recta*. En: Rev. Enseñanza de las Ciencias. Vol. 18, 1.

DEDEKIND, R. (1888) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial. Madrid. Traducción de José Ferreiros. 1998.

DESCARTES, R (1637) *La Geometrie.* En: SMITH, D (1959) A source book in mathematics. Dover Publications. New York.

DEVLIN, K. (2003) *El lenguaje de las matemáticas.* Editorial Robinbook. Bogotá.

DONADO A., et al. (1997) *Sucesiones de números reales,* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

DUNHAM W. (1999) *Euler. The master of us all.* Colección La Matemática en sus personajes. Editorial Nivola. Madrid. Traducción de Jesús Fernández (2000).

EUCLIDES, *Elementos,* En: VERA, F. (1970) *Científicos Griegos.* Aguilar S.A. de Ediciones. Madrid.

KLEIN, J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* Dover Publications. New York.

KLINE, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid.

LUQUE, C. (1993) *El cálculo: Una versión sin el concepto de límite.* Universidad Pedagógica Nacional.

MORA, L. y TORRES, J. (2004) *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales.*. Tesis de Maestría en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

NEUGEBAVER, O. (1969) *The Exact Sciences in Antiquity*. Dover Publications. New York.

NEWMAN, J. (1997) *Sigma. El Mundo de las Matemáticas.* Tomo I y IV. Editorial Grijalbo. Barcelona.

REY, J. et al (1958) *Análisis matemático.* Vol. 1. Editorial Kapeluz. Cuarta edición. Buenos Aires.

____________ y BABINI, J. (1986) *Historia de la Matemática*. Vol. 2. Editorial Gedisa. Barcelona.

RIGO, M. (1994) *Elementos históricos y sicogenéticos en la construcción del continuo matemático.* En Rev. Educación Matemática. Vol. 6. No.1-2. Agosto.

ROMERO, I. (1997) *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción.* Colección Mathema. Ed. Comares. Granada.

___________ (1996) "*La introducción del número real en la enseñanza secundaria*". En Rev. Epsilon. Vol. 12. Nº 34.

___________ , RICO, L. (1999) "*Representación y comprensión del número real. Una experiencia didáctica en secundaria*". En Rev. EMA. Vol. 4. Nº 2.

SÁNCHEZ, C. H. (1997) *La construcción de los números reales*. En: XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

SMITH, D. (1958) *History of Mathematics*. Dover Publications. New York.

STEVIN, S (1585) *La Disme*. En: SMITH, D (1959) A source book in mathematics. Dover Publications. New York.

TAKEUCHI, Y (1974) *Análisis matemático I*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

WALDEGG, G. (1996) "*La Contribución de Simon Stevin a la Construcción del Concepto de Número*". En Rev. Educación Matemática - Vol. 8 - Nº 2 – Agosto. México