1. El ejemplo básico: los números reales

En una ocasión[1] construimos el conjunto de los números reales a partir de los números naturales, vía los números racionales positivos y cortaduras de Dedekind. El matemático alemán David Hilbert (1862–1943) denominó a esta manera de acceder a los números reales, método genético, diciendo que aunque fuera un buen camino desde el punto de vista pedagógico[2], él prefería otro enfoque, más seguro desde el punto de vista lógico y planteó, a finales del siglo XIX (1899), un sistema de axiomas[3] para caracterizar a los números reales, en el Apéndice VI de su obra Fundamentos de Geometría.

---

[1] LUQUE, C., MORA, L., TORRES, J. (2004) *Una construcción de los números reales positivos*, Universidad Pedagógica Nacional.

[2] KLINE, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. III, Ed. Alianza, Madrid, p. 1306.

[3] Una presentación axiomática consta de unos *términos no definidos*, *conceptos primitivos* no susceptibles de definición y un *conjunto de axiomas* o *proposiciones primeras*, relaciones entre los términos no definidos que se aceptan como ciertas; éstos constituyen el punto de partida de una teoría matemática en la cual se plantean otras afirmaciones que se deducen de dichos axiomas, los teoremas; (REY PASTOR, J. (1952) *Análisis*, Tomo I, Vol. I, Ed. Kapelusz, Buenos Aires, p.10); dicho de otra

Hilbert supone[4] la existencia de un sistema de entes –números– y de unas relaciones entre ellos que se ajustan a ciertas condiciones, los axiomas, los cuales distribuye en cuatro grupos, a saber: Axiomas de Enlace (6), Axiomas de Cálculo (6), Axiomas de Ordenación (4) y Axiomas de Continuidad (2).

La existencia de un conjunto de números que satisfaga este conjunto de axiomas, salvo el nombre y la representación de los objetos, corresponde con el mismo conjunto de los números reales antes construido; en esencia, existe un solo conjunto de números reales[5], es decir que sólo un conjunto de números, salvo por el nombre de sus elementos, cumple con los axiomas establecidos.

En la presentación axiomática actual[6], los axiomas que caracterizan a los números reales se clasifican en tres grupos: *axiomas de campo* (hacen referencia a las propiedades básicas que cumplen los reales con dos operaciones definidas: la adición y la multiplicación), *axiomas de orden* que establecen los criterios para comparar números, identificando cuándo un número es mayor, menor o igual que otro, y un axioma de completitud que nos permite introducir los números irracionales y estudiar las propiedades de continuidad de los números reales[7].

1.1. Axiomas de campo

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones la adición (+) y la multiplicación, ellas satisfacen los siguientes axiomas:

La pareja (R, +) es un grupo abeliano, esto significa que

C1. Si a, b son números reales, entonces $a + b$ es un número real[8].

C2**. *Propiedad asociativa de la adición*:** Si a, b, c son números reales, entonces

---

forma, los teoremas se demuestran a partir de los axiomas siguiendo una manera de razonar, basada en la lógica, generalmente, la lógica bivalente o lógica clásica.

[4] CAMPOS, A. (1994) *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

[5] McSHANE, E., BOTTS, T. (1970) *Análisis Real*, Ed. Aguilar, Madrid, pp. 29-33.

[6] Ver por ejemplo APÓSTOL, T. (1988) *Calculus,* Vol. I, Segunda edición, Ed. Reverté, Barcelona o SPIVAK, M. (1996) *Cálculo infinitesimal*, Segunda edición, Ed. Reverté, México.

[7] No abordaremos en detalle la cuestión del axioma de completez, pues no es relevante para caracterizar la *estructura algebraica* de los números reales.

[8] Muchos textos que hacen una presentación axiomática de los números reales excluyen este primer axioma y el análogo a éste con la multiplicación, dado que al determinar la adición y la multiplicación como operaciones, en el sentido moderno, no los requieren; sin embargo, Hilbert en su versión axiomática de $\mathbb{R}$, sí los incluye dentro del primer conjunto de axiomas; nosotros también lo incluiremos dado que no hemos definido qué es una operación.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

C3. ***Existe un elemento idéntico para la adición en el conjunto de los números reales***, que notamos 0 y es tal que para cualquier número real a se cumple que:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

C4. Para cada número real a ***existe*** un elemento que llamamos ***inverso aditivo***, y notamos $-a$, tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

C5. ***Propiedad conmutativa de la suma*:** Si a, b son números reales, entonces

$$a + b = b + a$$

La operación que llamamos multiplicación y que notamos con el signo ×, es tal que la pareja $(R - \{0\}, \times)$ es un grupo abeliano, esto significa que:

C6. Si a, b son números reales, entonces $a \times b$ es un número real.

C7**.** ***Propiedad asociativa de la multiplicación***: Si a, b, c son números reales, entonces

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

C8. ***Existe un elemento idéntico para la multiplicación el conjunto de los números reales***, diferente de cero, que notamos 1, tal que para cualquier número real a se cumple que:

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

C9. ***Para todo número real a diferente de cero*** ($a \neq 0$) ***existe*** un número real que llamamos ***el inverso multiplicativo*** de a y notamos a^{-1} o $\frac{1}{a}$, de tal manera que

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$$

C10. ***Propiedad conmutativa de la multiplicación:*** Si a, b son números reales, entonces

$$a \times b = b \times a.$$

C11. ***Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de números reales****:* Esta propiedad establece un vínculo entre las dos operaciones: Si a, b, c son números reales, entonces:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

1.1.1. Propiedades de las operaciones con respecto a la igualdad entre números reales

La igualdad entre números reales *es compatible* con las operaciones en el sentido de que:

Para todo a, b, c, d números reales, si

$$a = b \text{ y } c = d \quad \text{entonces} \quad a + c = b + d \quad \text{y} \quad a \times c = b \times d.$$

A esta propiedad la llamamos también ***propiedad uniforme de la adición y la multiplicación, respectivamente.***

1.1.2. Definiciones

Si a, b son números reales, definimos la ***sustracción*** entre a y b por:

$$a - b = a + (-b).$$

y la ***división*** entre a y b por:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b},$$

siempre que b no sea 0.

Asumamos ahora, que existe un conjunto de *números*, donde están definidas dos operaciones que llamaremos, de igual forma, suma y multiplicación y que cumplen los axiomas de campo que hemos enumerado, con la salvedad de que en el axioma C8 no es necesario que 1 sea diferente de 0, puesto que $\{0\}$ con la única operación posible: $0 * 0 = 0$, es un campo, el *campo trivial*.

* * *

Los teoremas sobre las propiedades algebraicas que se cumplen en los números reales son válidos en cualquier campo, puesto que en las demostraciones que hacemos usamos como argumento, los axiomas de campo y los teoremas que de ellos se van deduciendo y no la naturaleza de los números en cuestión.

* * *

En lo que sigue demostraremos algunos teoremas que se cumplen en un campo y usaremos la palabra *número*, para un elemento cualquiera de un campo no trivial.

1.1.3. Teoremas

1. El elemento idéntico de la suma, el cero 0, determinado en el axioma C3 es único.

Prueba

Supongamos que existen dos números 0 y 0´ que cumplen el axioma C3, entonces

$$0 + 0' = 0' \quad \text{porque 0 es módulo}$$

y

$$0 + 0' = 0 \quad \text{porque } 0' \text{ es módulo}$$

lo que implica que $0 = 0'$, por ser los dos iguales a un mismo número.

2. El elemento idéntico de la multiplicación, el uno 1, también es único.

3. ***Propiedad cancelativa de la adición:*** Si a, b son números y

$$a + b = a + c \quad \text{entonces} \quad b = c.$$

Prueba

Como

$$a + b = a + c$$

por la propiedad uniforme de la adición, sumamos en ambos lados de la igualdad el mismo número $-a$ y obtenemos

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$

y por el axioma C2

$$((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$$

ahora, usamos el axioma C4, para obtener:

$$0 + b = 0 + c$$

y por el axioma C3, concluimos que

$$b = c$$

4. ***Propiedad cancelativa de la multiplicación***: Si a, b son números y

$$\text{si } a \times b = a \times c \quad \text{con} \quad a \neq 0, \text{ entonces } b = c.$$

5. El inverso aditivo de un número es único.

6. El inverso multiplicativo de un número es único.

7. Para todo par de números a y b, si

$$a + b = 0 \text{ entonces } b = -a.$$

Prueba

Como $a + b = 0$, por la propiedad uniforme de la adición:

$$(-a) + (a + b) = (-a) + 0$$

por el axioma C2

$$((-a) + a) + b = (-a) + 0$$

de acuerdo con el axioma C4

$$0 + b = (-a) + 0$$

y finalmente, utilizando el axioma C3

$$b = -a.$$

8. Para todo par de números a y b, si $a \neq 0$ y

$$a \times b = 1 \quad \text{entonces} \quad b = \frac{1}{a}.$$

9. Para todo número a se tiene que $0 \times a = 0$.

10. 0 no tiene inverso multiplicativo.

Prueba

Supongamos que el cero *si* tiene inverso multiplicativo, entonces:

$0 \times \frac{1}{0} = 1$	Por el axioma C9.
$0 = 1$	Por el teorema 9.

Pero esto contradice el axioma C8, y por lo tanto *no es cierto* que 0 tenga inverso multiplicativo.

11. Para todo número a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$.

12. Para todo número a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{a} = 1$.

Prueba

$\frac{a}{a} = a \times \frac{1}{a}$ Por la definición de división

$\frac{a}{a} = 1$ Por el axioma C9.

13. $\frac{1}{1} = 1$.

14. Para todo número a,

$$\frac{a}{1} = a\ .$$

15. Para todo número a se tiene que

$$a = -(-a).$$

Prueba

Por el axioma C4 sabemos que

$$(-a) + a = 0$$

y por teorema 7

$$a = -(-a).$$

16. Para todo número a se tiene que, si $a \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a\ .$$

17. Para todo par de números a y b se tiene que

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

Prueba

Por el axioma C4, tenemos que

$$a + (-a) = 0$$

y

$$b + (-b) = 0$$

Según la propiedad uniforme de la adición y el axioma C3,

$$(a + (-a)) + (b + (-b)) = 0$$

De acuerdo con los axiomas C2 y C5,

$$(a + b) + ((-a)) + (-b)) = 0$$

Finalmente, por el teorema 7 y la simetría de la igualdad:

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

18. Para todo par de números a y b diferentes de cero se tiene que:

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}.$$

19. Para todo par de números a y b se tiene que

$$(-a) \times b = -(a \times b).$$

20. Para todo par de números a y b se tiene que

$$(-a) \times (-b) = a \times b.$$

Prueba

$[(a + (-a)] \times (-b) = a \times (-b) + (-a) \times (-b)$	Por el axioma C11.
$0 \times (-b) = a \times (-b) + (-a) \times (-b)$	Por el axioma C4.
$0 = a \times (-b) + (-a) \times (-b)$	Por el teorema 9.
$0 = -(a \times b) + (-a) \times (-b)$	Por el teorema 19 y C10.
$(-a) \times (-b) = -(-(a \times b))$	Por el teorema 7.
$(-a) \times (-b) = a \times b$	Por el teorema 15.

21. $-0 = 0$.

22. Para todo número a se tiene que $a - 0 = a$.

23. Para todo número a se tiene que, $a - a = 0$.

24. Para todo número a, b y c se tiene que

$$(a - b) + (b - c) = a - c.$$

Prueba

$(a - b) + (b - c) = (a + (-b)) + (b + (-c))$	Por la definición de sustracción.
$= (a + ((-b) + b)) + (-c)$	Por el axioma C2.
$= (a + 0) + (-c)$	Por el axioma C4.
$= a + (-c)$	Por el axioma C3.
$= a - c$	Por la definición de sustracción.

25. Para todo número a, b y c se cumple que

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c).$$

26. Para todo número a y b se tiene que

$$a = b \text{ si y sólo si } -a = -b.$$

27. Para todo número a se cumple que

$$-a = (-1) \times a.$$

28. Para todo par de números a y b existe un número x tal que si:

$$a + x = b \text{ entonces } x = b - a.$$

29. Si $a \times x = b$ y $a \neq 0$ entonces $x = \dfrac{b}{a}$.

30. Para todo número a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{a} \neq 0$.

31. Para todo par de números a y b se cumple que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$a \times b \neq 0.$$

Por una argucia lógica, este teorema se puede escribir de otra manera,

$$\text{si } a \times b = 0 \text{ entonces } a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

en esta forma, se usa algunas veces para resolver ecuaciones de segundo grado.

Demostremos la segunda forma.

Prueba

Como $a \times b = 0$ y suponiendo $a \neq 0$ entonces

$a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times 0$	Por la propiedad uniforme de la multiplicación.
$(a^{-1} \times a) \times b = 0$	Por el axioma C7, teorema 9 y axioma C10
$1 \times b = 0$	Por el axioma C9.
$b = 0$	Por el axioma C8.

32. Si a, b, c, d son números, b y d son diferentes de cero, y si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad a \times d = b \times c.$$

33. Si a, b, c, d son números, b y d son diferentes de cero, entonces

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

34. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$

Prueba

$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{c}$	Por el teorema 33

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b} \times 1$$ Por el teorema 12

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$ Por C9.

35. Si *a, b, c* y *d* son números, con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

36. Si *a, b, c* son números y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

37. Si *a, b, c, d* son números, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{c \times d}.$$

38. Si *a, b,* son números y $b \neq 0$ entonces

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{si } b \neq 0.$$

Prueba

a. Demostremos primero que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = 1 \times \left(-\frac{a}{b}\right)$$ Por el axioma C8.

$$-\frac{a}{b} = (-1) \times \frac{a}{b}$$ Por C10 y el teorema 19.

$$-\frac{a}{b} = \frac{(-1) \times a}{b}$$ Por los teoremas 14 y 33.

$-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$ Por el teorema 19 y el axioma C8.

b. Demostremos ahora que:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Prueba

Sea $(-b)\,x = a$ entonces, por el teorema 29, $x = \dfrac{a}{-b}$.

Por otra parte, si $(-b)\,x = a$, tenemos que:

$-(b\,x) = a$ Por el teorema 19.

$-(b\,x) = -(-a)$ Por el teorema 15.

$(-1)\,(bx) = (-1)\,(-a)$ Por el teorema 27.

$b\,x = -a$ Por el teorema 4.

De donde, $x = \dfrac{-a}{b}$ por el teorema 29.

Finalmente, $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b}$.

c. La igualdad:

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

es consecuencia de la transitividad.

Como vemos, estas propiedades y las que de ellas se deduzcan, son válidas en cualquier conjunto de números con dos operaciones, que por facilidad llamamos también, suma y multiplicación, siempre y cuando satisfagan los axiomas C1 a C11, listados al comienzo. Una estructura conformada por un conjunto de números con dos operaciones que cumpla dichos axiomas se llama un *campo*[9].

Ejercicio

Demuestre los teoremas enunciados que no han sido demostrados.

[9] El término *campo* y su definición explícita fue introducido por Richard Dedekind en 1879, aunque en la obra de Abel y Galois, ya estaba implícito.

1.2. Otros campos

No es necesario ir muy lejos para encontrar otros ejemplos de campos, busquemos inicialmente al interior de los números reales:

1. Los números racionales, incluyendo a los racionales positivos, negativos y el cero; forman *un campo.*

2. La extensión cuadrática de los números racionales que incluye a $\sqrt{2}$, o sea:

   $$Q(\sqrt{2}) = \{z = x + y\sqrt{2} : x, y \in Q\}$$

   Con la suma componente a componente y la multiplicación dada por

   $$(x + y\sqrt{2})(z + t\sqrt{2}) = (xz + 2yt) + (xt + yz)\sqrt{2}$$

   también forman un campo.

3. En realidad cualquier extensión cuadrática de los números racionales o de una extensión de ellos que incluya $\sqrt{k}$, si esta raíz no está en el campo, es también un campo.

4. Los números construibles y sus extensiones cuadráticas son campos.

Ejercicio

1. *Presente otros ejemplos de campos.*

1.3. Campos ordenados

1.3.1. Axiomas de orden

En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales definimos[10] el orden aditivo entre ellos, diciendo que

$$a \leq b \text{ si y sólo si existe un natural } c \text{ tal que } a + c = b.$$

En los números racionales positivos lo hicimos de manera similar y con los mismos resultados[11]. Pero, cuando intentamos aplicar el mismo método para definir el orden

[10] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J. (2002) *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*, Universidad Pedagógica Nacional, Ed. Antropos, Bogotá.

en un conjunto que incluyera números negativos, aparece el problema de que siempre existe un número real que sumado con otro nos da cualquier otro y así, todos los números resultarían menores y mayores que todos los demás.

Sin embargo, la posibilidad de caracterizar a los números reales positivos con respecto a las operaciones, para distinguirlos de los demás[12], nos permite definir un orden para los números reales. Así, una manera para definir un orden en un campo, es estudiar la posibilidad de encontrar un subconjunto de éste, que tenga las mismas propiedades que las de los números reales positivos en los números reales.

Supongamos entonces, que existe un subconjunto **P** de un campo**,** que llamamos el conjunto de los *números positivos*, de tal manera que la suma de dos números positivos sea positiva y el producto de positivos también sea positivo, que el 0 del campo, no sea positivo y todo número del campo diferente de 0, sea positivo o su inverso aditivo sea positivo. Estas características del conjunto de los números positivos los asumiremos como *axiomas* y, como nos permiten definir un *orden* entre los elementos del campo, que es *compatible con las operaciones*, en un sentido que aclaramos más adelante, los llamamos *axiomas de orden.* Simbólicamente,

O1. Si a, b son números positivos entonces: $a + b$ y $a \times b$ son números positivos.

O2. Si a es un número, entonces *sólo una* de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$a \in \mathbf{P}, \qquad a = 0, \qquad -a \in \mathbf{P}$$

Este axioma se conoce como *ley de tricotomía.*

1.3.2. Definiciones

1. $a < b$ significa que $b - a$ es un número positivo. "< " se lee "*menor que*"

2. $a > b$ significa que $b < a$. " > " se lee "*mayor que*"

3. $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$. " ≤ " se lee "*menor o igual que*"

4. $a \geq b$ significa que $a > b$ o $a = b$. " ≥ " se lee "*mayor o igual que*"

---

[11] LUQUE, C., MORA, L. (2001) *Una aproximación a los números racionales positivos*, Universidad Pedagógica Nacional.

[12] LUQUE, C., MORA, L., TORRES, J. (2004) *Una presentación de los números negativos.* En: Memorias XIV Encuentro de geometría y sus aplicaciones y II Encuentro de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional.

Una consecuencia inmediata de las definiciones es que

$a > 0$ si y sólo si a es positivo

Decimos que a es *negativo* si $a < 0$, y si $a \geq 0$ se dice que a es *no negativo.*

1.3.3. Teoremas

39. La relación $<$ es *transitiva*; es decir, que si

$a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

40. La relación $\leq$ es un *orden total* en el campo: si a y b son números[13], se cumple exactamente *una* de las siguientes situaciones:

$$a < b,\ a = b,\ b < a$$

Puesto que el número $b - a$ cumple exactamente una de las situaciones:

$$b - a > 0,\ b - a = 0,\ b - a < 0.$$

41. La relación $\leq$ es *reflexiva.*

42. La relación $\leq$ es *antisimétrica.*

43. La relación $\leq$ es *transitiva.*

Decimos que *una relación de orden es compatible con las operaciones suma y multiplicación en un campo*, o que el campo es *un campo ordenado*, si se cumplen las propiedades:

44. ***Monotonía de la adición***. Para todo par de números x, y, si

$$x < y \quad \text{entonces} \quad x + z < y + z,$$

para todo número z.

Prueba

Supongamos que $x < y$, entonces $y - x \in$ P; por el axioma C3, tenemos que

$$(y - x) + 0 \in \mathbf{P}$$

[13] Aquí la palabra *número* reemplaza a un elemento de un campo ordenado, no trivial.

o lo que es igual, por el teorema 23,

$$(y - x) + (z - z) \in \mathbf{P}$$

para un número z cualquiera; y por los axiomas C2, C5 y la definición de sustracción, nos queda

$$(y + z) - (x + z) \in \mathbf{P}$$

lo que significa que

$$x + z < y + z.$$

45. ***Monotonía de la multiplicación:*** Para todo par de números x, y, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z < y \times z,$$

para todo número positivo z.

En un campo ordenado no trivial también se cumple:

46. Para todo par de números x, y, si

$$x < y, \text{ entonces } x \times z > y \times z,$$

para todo número negativo z.

47. $1 > 0$. Esto significa que $1 \in$ P.

Prueba

Supongamos que $1 \notin$ P entonces, o bien

$-1 \in$ P	Por el axioma O2.
$(-1) \times (-1) \in$ P	Por el axioma O1.
$(-1) \times (-1) = 1 \times 1 \in$ P	Por el teorema 20.
$1 \times 1 = 1 \in$ P	Por el axioma C8.

lo que contradice la hipótesis; o bien

$1 = 0$	Por el axioma O2.

lo que contradice el axioma C8.

Por lo tanto $1 \in$ P, o lo que es lo mismo $1 > 0$.

48. Para todo número a, si $a > 0$ entonces $\dfrac{1}{a} > 0$.

49. Para todo número a, si $a < 0$ entonces $\dfrac{1}{a} < 0$.

50. Para todo par de números a y b, se cumple que si

$$a > 0 \text{ y } b < 0 \quad \text{entonces} \quad a \times b < 0.$$

Prueba

$a \in$ P y $-b \in$ P	Por hipótesis.
$a \times (-b) \in$ P	Por el axioma O1.
$-(a \times b) = a \times (-b) \in$ P	Por el teorema 19.
$(a \times b) \notin$ P	Por el axioma O2.

Por otra parte, como $a \neq 0$ y $b \neq 0$,

$a \times b \neq 0$	Por el teorema 31.

Luego,

$a \times b < 0$	Por el axioma O2.

51. Para todo par de números a y b, se cumple que si

$$a \times b > 0 \quad \text{entonces} \quad a > 0 \text{ y } b > 0 \quad \text{o} \quad a < 0 \text{ y } b < 0.$$

52. Para todo par de números a y b, se cumple que si

$$a \times b < 0 \quad \text{entonces} \quad a > 0 \text{ y } b < 0 \quad \text{o} \quad a < 0 \text{ y } b > 0.$$

53. Para todo número a, si

$$a \neq 0 \;\text{ entonces }\; a^2 > 0.$$

Prueba

$a \neq 0$	Por hipótesis.
$a \in \text{P}$ o $-a \in \text{P}$	Por el axioma O2.
Si $a \in \text{P}$,	
$a^2 = a \times a \in \text{P}$	Por el axioma O1.
esto significa que $a^2 > 0$.	
Si $-a \in \text{P}$,	
$(-a) \times (-a) = a \times a \in \text{P}$	Por el teorema 20 y el axioma O1.
esto significa que $a^2 > 0$.	

54. Para todo par de números a y b, se cumple que si

$$a < b \text{ entonces } -a > -b.$$

En resumen, hemos demostrado que en las desigualdades en un campo ordenado:

a. Podemos sumar los miembros correspondientes de dos desigualdades del mismo sentido y obtendremos una desigualdad del mismo sentido

b. Podemos sumar (o restar) cantidades iguales a ambos miembros de una desigualdad y obtendremos una desigualdad del mismo sentido

c. Podemos multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad *por un número positivo* y obtendremos una desigualdad del mismo sentido.

Una *diferencia* en el comportamiento de las desigualdades, con respecto a las igualdades, como sucede con los números reales, es que cuando se *multiplican o dividen por un número negativo*, tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad.

55. ***La densidad de los números de un campo ordenado:*** Para todo par de números x y y, si

$x < y$, *existe un número* z, *tal que* $x < z < y$

Prueba

$x < y$	Por hipótesis.
$x + x < y + x$	Por el teorema 42.
$x + y < y + y$	Por el teorema 42.

Así,

$2\,x < y + x < 2y$	Por el axioma C5 y el teorema 39.
$x < \dfrac{y+x}{2} < y$	Por axioma C7, C9 y el teorema 45.

Por tanto, existe un número $z = \dfrac{y+x}{2}$ tal que $x < z < y$.

Ejercicio

Demuestre los teoremas enunciados que no han sido demostrados.

1.4. Ejemplos de campos ordenados

Los campos enunciados anteriormente son campos ordenados, por estar inmersos en el campo ordenado de los números reales, tienen la misma relación de orden.

Ejercicio

Presente ejemplos de campos ordenados.

1.5. Dominios de integridad

Si buscamos un poco más adentro de los números racionales, por ejemplo en los números enteros, perdemos una propiedad básica; ya no se cumple el axioma C9, es decir que ya *no todos* los números enteros tienen un inverso multiplicativo; de hecho, sólo los números 1 y – 1 lo tienen.

En su lugar tenemos algo más débil, la propiedad *cancelativa de la multiplicación de números enteros*; esta propiedad, es equivalente al teorema 31, pues si *a, b,* son números enteros y se cumple que

$$a \times b = 0 \quad \text{entonces} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

podemos demostrar la propiedad cancelativa, suponiendo que

$$a \times b = a \times c \quad \text{y} \quad \text{que } a \neq 0,$$

entonces, por el teorema 28,

$$(a \times b) - (a \times c) = 0$$

y por el teorema 25,

$$a \times (b - c) = 0$$

de donde, por el teorema 31,

$$b - c = 0$$

y por lo tanto

$$b = c\,,$$

de nuevo, por el teorema 28.

Y viceversa, si suponemos que en un conjunto con dos operaciones, suma y multiplicación, se cumplen todos los axiomas C1 al C11, a excepción del C9, entonces si se cumple la propiedad cancelativa de la multiplicación también se cumple que

$$a \times b = 0 \quad \text{implica } a = 0 \ \text{ o } \ b = 0$$

Ejercicio

Demuestre que $a \times b = 0$ implica $a = 0$ o $b = 0$, suponiendo la propiedad cancelativa, sin hacer uso del axioma C9.

La estructura resultante de sustituir en los axiomas de campo el axioma C9 por la propiedad cancelativa de la multiplicación, o equivalentemente asumiendo el teorema 31 como axioma, se conoce como *dominio de integridad* o *dominio entero*[14]. Por supuesto, el primer ejemplo y el modelo de ellos es el conjunto de los números enteros.

En un dominio de integridad se conservan también las propiedades de la uniformidad de la igualdad con respecto a la adición, la multiplicación y la definición de sustracción.

Algunos de los teoremas que ya hemos demostrado sobre las propiedades algebraicas que se cumplen en un campo, son válidos en un dominio de integridad; específicamente, aquellos teoremas que no incluyen en su enunciado o demostración el axioma C9 o alguna de sus consecuencias. Por ejemplo, el teorema 9 que enuncia:

[14] LENTIN, A.; RIVAUD, J. (1971) *Álgebra Moderna*, Tercera edición, Ed. Aguilar, Madrid, p. 84.

Para todo par de números a y b, si $a \neq 0$ y $a \times b = 1$ entonces $b = \frac{1}{a}$,

no se cumple en un dominio de integridad, pues en su demostración se requiere de la existencia del inverso multiplicativo de a, y la propiedad cancelativa de la multiplicación no es suficiente para suplir este requerimiento.

Enunciaremos ahora algunos teoremas, derivados de los axiomas de un dominio de integridad, que coinciden con los enunciados para un campo y cuyas demostraciones son similares, cuando no iguales a las ya dadas; esto con el propósito de insistir en que los teoremas que cumplen los números no dependen de su significado, sino de las propiedades que los definen.

1.5.1. Teoremas válidos en un dominio de integridad

D1. El elemento idéntico de la suma, el cero 0, es único.

D2. El elemento idéntico de la multiplicación, el uno 1, también es único.

D3. ***Propiedad cancelativa de la adición:*** Si a, b son números y

$$a + b = a + c \quad \text{entonces} \quad b = c.$$

D4. El inverso aditivo de un número es único.

D5. Para todo par de números a y b, si

$$a + b = 0 \text{ entonces } b = -a.$$

D6. Para todo número a se tiene que $0 \times a = 0$.

D7. Para todo número a se tiene que

$$a = -(-a).$$

D8. Para todo par de números a y b se tiene que

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

D9. Para todo par de números a y b se tiene que

$$(-a) \times b = -(a \times b).$$

D10. Para todo par de números a y b se tiene que

$$(-a) \times (-b) = a \times b.$$

D11. Para todo número a se tiene que $a - 0 = a$.

D12. Para todo número a se tiene que, $a - a = 0$.

D13. Para todo número a, b y c se tiene que

$$(a - b) + (b - c) = a - c.$$

D14. Para todo número a, b y c se cumple que

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c).$$

D15. Para todo número a y b se tiene que

$$a = b \text{ si y sólo si } -a = -b.$$

D16. Para todo número a se cumple que

$$-a = (-1) \times a.$$

D17. Para todo par de números a y b existe un número x tal que si:

$$a + x = b \quad \text{entonces} \quad x = b - a.$$

Las demostraciones de estos teoremas son idénticas a las que se realizaron con los mismos teoremas en un campo. A manera de ejemplo, veamos la demostración del teorema D15, que corresponde al teorema 25 de un campo:

Prueba

$a \times (b - c) = a \times (b + (-c))$	Por la definición de sustracción.
$= (a \times b) + (a \times (-c))$	Por el axioma C11
$= (a \times b) + (-a \times c)$	Por el axioma C10 y el teorema D9
$= (a \times b) - (a \times c)$	Por la definición de sustracción.

En el caso en que existan inversos multiplicativos para algunos elementos en un dominio de integridad, los teoremas enunciados para los campos, relativos a ellos, son válidos para estos elementos.

1.6. Dominios de integridad Ordenados

1.6.1. El orden aditivo de los números enteros

Para definir un orden sobre el conjunto Z de los números enteros, podemos elegir dos caminos que son equivalentes. El primero, es usar el orden definido en los números reales particularizando en los números enteros, en cuyo caso el conjunto de los números enteros positivos coincide con el conjunto de los números naturales excluyendo el cero. El segundo camino[15] es usar de manera directa el conjunto de los números naturales para definir que *a es menor o igual que b* o también que *b es mayor o igual que a* y lo notamos

$a \leq b$ si y sólo si existe un *número natural* c tal que $a + c = b$.

Notemos que el número c es un natural, *no un entero cualquiera*, pues si así fuera, todos los números serían menores o iguales que cualquier otro, trivializando la relación.

Esta es una relación de orden, pues cumple las propiedades:

i. *Reflexiva*: para todo número entero a se cumple que $a \leq a$.

Prueba

El primer axioma de Peano[16] garantiza que el 0 es un número natural y la propiedad modulativa de la suma afirma que para todo número natural a, se tiene que $a + 0 = a$, por lo tanto $a \leq a$ para todo número entero a.

---

[15] Preferimos aquí esta forma de presentación, porque nos permite definir otra relación en los números enteros, cambiando la operación suma por la multiplicación, abriendo posibilidades para la construcción de nuevas estructuras, como veremos en el siguiente capítulo.

[16] En estas demostraciones emplearemos el sistema axiomático de Peano para los números naturales, propuesta en 1889. Peano señaló como términos primitivos, número natural, el número 0 y el concepto de sucesor, y cinco axiomas: (1) 0 es un número natural, (2) el sucesor de cualquier número natural n es un número natural, n^+, (3) Dos números naturales diferentes no tienen nunca el mismo sucesor, es decir que si $k \neq n$ entonces $k^+ \neq n^+$, (4) 0 no es sucesor de algún número natural y (5) Si P es una propiedad tal que *i)* 0 tiene la propiedad P y *ii)* siempre que un número n tiene la propiedad P implica que su sucesor n^+ también tiene la propiedad P, entonces todo número natural tiene la propiedad P.

ii. Antisimétrica: dados dos números enteros cualesquiera a y b, si se cumple que $a \leq b$ y también se cumple que $b \leq a$ entonces debe cumplirse que $a = b$.

Prueba

Si se cumple que $a \leq b$ entonces existe un número natural c tal que $a + c = b,$ y si además se cumple que $b \leq a$, existe también un número natural d tal que $b + d = a.$

Si reemplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

$$(a + c) + d = a$$

aplicando las propiedades asociativa y cancelativa de la adición de números enteros, la igualdad se convierte en

$$c + d = 0$$

lo que implica que $c = d = 0$, porque si no fuera así y uno de ellos, por ejemplo d fuera diferente de 0, existiría un número natural p tal que $p^{+} = d$ y entonces

$$c + d = c + p^{+} = (c + p)^{+} = 0$$

lo que significaría que 0 es sucesor de $(c + p)$, lo que contradice el 4 axioma de Peano.

iii. Transitiva: dados números enteros cualesquiera a, b y c, si se cumple que $a \leq b$ y también se cumple que $b \leq c$ entonces debe cumplirse que $a \leq c$.

Prueba

Si se cumple que $a \leq b$ entonces existe un número natural k tal que $a + k = b,$ y si además se cumple que $b \leq c$, existe también un número natural d tal que $b + d = c.$

Si reemplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

$$(a + k) + d = c$$

aplicando la propiedad asociativa de la adición, la igualdad se convierte en

$$a + (k + d) = c$$

lo que significa que $a \leq c$, puesto que $(k + d)$ es un número natural.

Este es un ejemplo de *orden total o lineal* donde dados dos elementos cualesquiera a y b del conjunto siempre se tiene que:

$$a \leq b \text{ ó } b \leq a.$$

Esta relación de orden definida para los números enteros respeta las operaciones definidas entre ellos, en el sentido de que se cumplen las propiedades de:

i. *Monotonía de la adición:* Dados números enteros cualesquiera a, b, c y d si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces: $a + b \leq c + d$

Prueba:

Si $a \leq b$ entonces existe un número natural k tal que:

$$a + k = b$$

Si $c \leq d$ entonces existe un natural n tal que:

$$c + n = d$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$(a + k) + (c + n) = b + d$$

y aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, tenemos:

$$(a + c) + (k + n) = b + d$$

Lo que significa que:

$$a + c \leq b + d$$

puesto que $(k + n)$ es un número natural.

ii. *Monotonía de la multiplicación:* Dados a, b, c números enteros, si $a \leq b$ y c es un número natural entonces $a \times c \leq b \times c$.

Prueba

Si $a \leq b$ existe un natural k tal que

$$a + k = b.$$

Multiplicando esta igualdad por *c,* y aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma obtenemos:

$$a \times c + k \times c = b \times c$$

y como $k \times c$ es un número natural, esto significa que:

$$a \times c \leq b \times c$$

iii. Dados *a, b* números enteros y *c* un número natural distinto de cero, si $a \times c \leq b \times c$ entonces $a \leq b$.

Prueba

Supongamos que es cierto que $a \times c \leq b \times c$ pero que no es cierta la conclusión; entonces debe ser cierto que $b < a$ y por lo tanto existe un natural *d* (diferente de 0) tal que $b + d = a$ y si multiplicamos esta igualdad por un natural *c* diferente de 0 y aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma obtenemos que

$$b \times c + d \times c = a \times c$$

es decir que $b \times c < a \times c$, contra lo que habíamos supuesto. Entonces no es posible que $b < a$ y, por lo tanto, $a \leq b$.

El *orden aditivo* de los números enteros satisface los teoremas 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 50, 51, 52, 53 y 54 enunciados para los campos ordenados, los restantes no se cumplen por estar referidos a inversos multiplicativos, que no existen en los números enteros, ni en general en los dominios de integridad.

Un dominio de integridad donde esté definido un orden total que sea compatible con las operaciones, se denomina un *dominio de integridad ordenado*; nuestro primer ejemplo, por supuesto, es el dominio de integridad ordenado de los números enteros.

Ejercicio

Proponga formas para definir relaciones de orden compatibles con las operaciones en un dominio de integridad.

Un subconjunto de los números enteros del que se esperaría que tuviera una buena estructura algebraica es el conjunto de los números naturales, pues sirve como fundamento en la construcción de los otros tipos de números; sin embargo, debido a que su suma no tiene una estructura de grupo abeliano, por carecer de inversos aditivos, su estructura no tiene un nombre particular dentro del álgebra abstracta usual.

En el siguiente capítulo, definiremos la relación de divisibilidad entre números enteros usando la multiplicación en lugar de la suma, lo que nos conduce a construir otros ejemplos de campos y nuevas estructuras (en este caso, finitas).