IV Encuentro Internacional y VI Encuentro Departamental de Matemática Educativa
Ibagué, 5 al 8 de Julio 2005

Sobre la Extracción de la Raíz Cuadrada de una Matriz

JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ MOSCOSO*

1. Introducción

Si se considera un número $a \in \mathbb{R}$, como $(-a)^2 = a^2$, es evidente que para cualquier $a > 0$ se tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa; mientras que cuando $a < 0$ sus raíces cuadradas son dos imaginarios puros, una raíz es la conjugada de la otra. En general, si $a \in \mathbb{C}$, también a tiene dos raíces cuadradas distintas. En este documento se extiende el concepto de raíz cuadrada, para estudiar la raíz cuadrada de una matriz de tamaño $n \times n$, tema poco trabajado en la mayoría de textos de Álgebra Lineal.

2. Conceptos Básicos

Definición 2.1. Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$, una matriz X de tamaño $n \times n$ se llama raíz cuadrada de A si cumple que

$$X^2 = A. \tag{1}$$

La matriz X puede tener algunos elementos complejos.

Teorema 2.1. Método de Cayley

Si A es una matriz real de tamaño 2×2, entonces su raíz cuadrada está dada por

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{tr(A) + 2\sqrt{\det(A)}}} \left[A + \sqrt{\det(A)} I \right]. \tag{2}$$

*Profesor asociado, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas. E-mail: josajimenezm@unal.edu.co

Demostración

La demostración consiste en un cálculo directo,

$$\begin{aligned}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{tr(A)+2\sqrt{\det(A)}}}\right)^2 \left[A+\sqrt{\det(A)}I\right]^2 \\ &= \frac{1}{tr(A)+2\sqrt{\det(A)}}\left[A^2+2\sqrt{\det(A)}A+\det(A)I\right].\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Cayley-Hamilton,

$$A^2 - tr(A)A + \det(A)I = O,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \frac{1}{tr(A)+2\sqrt{\det(A)}}\left[tr(A)A+2\sqrt{\det(A)}A\right] \\ &= \frac{1}{tr(A)+2\sqrt{\det(A)}}\left(tr(A)+2\sqrt{\det(A)}\right)A.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A.$$

Teorema 2.2. Descomposición de Sylvester

Sea A una matriz real de tamaño $n\times n$ con valores propios distintos $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, forme las matrices

$$\mathbf{Z}(\lambda_i) = \frac{\vec{v}_i\vec{w}_i^t}{\vec{v}_i^t\vec{w}_i}, \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

donde $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ son los vectores propios de A y $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_n$ son los vectores propios de A^t. Entonces A se puede expresar como

$$A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{Z}(\lambda_i), \tag{4}$$

Demostración

Las matrices $\mathbf{Z}(\lambda_i)$ de tamaño $n\times n$, cumplen que

a) $\mathbf{Z}(\lambda_i)\mathbf{Z}(\lambda_j) = \begin{cases}\mathbf{Z}(\lambda_i) & \text{si } i=j,\\ O & \text{si } i\neq j.\end{cases}$

b) $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}(\lambda_i) = I_n$

Esto se tiene ya que si $\vec{v}_i$ y $\vec{w}_j$ son vectores propios correspondientes a valores propios distintos λ_i y λ_j, entonces $\vec{v}_i$ y $\vec{w}_j$ son ortogonales.

Nótese que si se premultiplica por A cualquier matriz $\mathbf{Z}(\lambda_i)$ se obtiene

$$A\mathbf{Z}(\lambda_i) = A\vec{v}_i \frac{\vec{w}_i^t}{\vec{v}_i^t\vec{w}_i} = \lambda_i \frac{\vec{v}_i\vec{w}_i^t}{\vec{v}_i^t\vec{w}_i} = \lambda_i\mathbf{Z}(\lambda_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

el mismo resultado se obtiene si se postmultiplica por A. Luego, si se suman estos productos se tiene

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} A\mathbf{Z}(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{Z}(\lambda_i)$$
$$A\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{Z}(\lambda_i),$$

lo cual completa la prueba.

Corolario 2.2.1. Si A es una matriz real de tamaño $n \times n$ con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces la m-ésima potencia de A está dada por

$$A^m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \mathbf{Z}(\lambda_i), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

este resultado cuando m es una fracción también se cumple.

Demostración

Queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 2.1. Determine una raíz cuadrada para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución

En este caso, la ecuación característica es:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Entonces, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$ y los vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$.

Por otra parte, los correspondientes vectores propios para la matriz A^t

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

son $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego,

$$\mathbf{Z}(1) = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(3) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(-2) = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \frac{3}{10} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{-2}{15} \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

Luego, una raíz de A es

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{10} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{-2}}{15} \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3. Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$ con valores propios λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ no necesariamente distintos, tal que la multiplicidad algebraica m_i de cada valor propio λ_i es igual a su multiplicidad geométrica μ_i. Entonces A se puede escribir como

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{Z}^*(\lambda_i), \tag{6}$$

donde r es el número de valores propios distintos y

$$\mathbf{Z}^*(\lambda_i) = P(\lambda_i) \left[Q(\lambda_i) P(\lambda_i) \right]^{-1} Q(\lambda_i), \tag{7}$$

con $P(\lambda_i) = [\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \ldots \; \vec{v}_{\mu_i}]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A asociados a λ_i y $Q(\lambda_i) = [\vec{w}_1 \; \vec{w}_2 \; \ldots \; \vec{w}_{\mu_i}]^t$ es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A^t correspondientes a λ_i.

Demostración

Queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 2.2. Determine las raíces cuadradas para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución

En este caso, la ecuación característica es:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda + 108 = 0.$$

Entonces, los valores propios de A son $\lambda_1 = 3$ (de multiplicidad algebraica 2) y $\lambda_2 = 12$ y los vectores propios correspondientes son $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Por otra parte, los correspondientes vectores propios para la matriz A^t

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & -4 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

son $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. Luego,

$$\mathbf{Z}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(12) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{3}{9} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \frac{12}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, una raíz de A es

$$
\begin{aligned}
A^{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 4 & 13 & -1 \\ -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Nótese que $-A^{\frac{1}{2}}$ también es raíz; otra raíz de A es

$$
\begin{aligned}
A^{\frac{1}{2}} =& -\frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

En este caso, $-A^{\frac{1}{2}}$ también es raíz.

Teorema 2.4. Sea $A = a.I_n$ una matriz real escalar de tamaño $n \times n$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces una raíz cuadrada de A es

$$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.Q, \tag{10}$$

donde Q es una matriz de tamaño $n \times n$, tal que $Q^2 = I_n$.

Demostración

La demostración consiste en un cálculo directo,

$$\left(\sqrt{a}.Q\right)\left(\sqrt{a}.Q\right) = a\,(Q.Q) = a.I_n = A.$$

Así, queda el teorema probado.

Ejemplo 2.3. Determine las raíces cuadradas de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución

Como A es una matriz escalar, se tiene que

$$A = 4.I_2,$$

luego, sus raíces cuadradas son de la forma

$$A^{\frac{1}{2}} =_2 \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

De manera análoga,

$$A^{\frac{1}{2}} =_2 \begin{bmatrix} \cosh x & -\operatorname{senh} x \\ \operatorname{senh} x & -\cosh x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

También, se pueden obtener como sigue

$$A^{\frac{1}{2}} =_2 \begin{bmatrix} t & 1-t \\ 1+t & -t \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

El lector puede elevar al cuadrado cualquiera y verificar que el resultado es la matriz A.

Ejemplo 2.4. Encuentre las raíces de la matriz $B = 16.I_3$.

Solución

Como B es una matriz escalar, sus raíces cuadradas son de la forma

$$B^{\frac{1}{2}} =_4 \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\beta) & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\beta) & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Todas las raíces cuadradas de B pueden obtenerse asignando valores a α y β en el intervalo $[0, 2\pi]$. El lector puede verificar que esta última matriz es una raíz cuadrada de la matriz dada.

Teorema 2.5. Sea $D = [d_{ii}]$ una matriz real diagonal de tamaño $n \times n$, entonces una raíz cuadrada de D es

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Demostración

Queda como ejercicio para el lector.

Observación

Como cada elemento d_{ii}, tiene dos raíces cuadradas $\sqrt{d_{ii}}$ y $-\sqrt{d_{ii}}$, entonces en la matriz (11), se puede reemplazar por la otra raíz del elemento d_{ii} y se obtiene una nueva raíz cuadrada para D. Por otra parte, si todos los elementos de D son distintos, entonces el número de raíces cuadradas de la matriz D es igual a 2^n.

Teorema 2.6. Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$, diagonalizable y sea P una matriz no singular tal que la matriz $D = P^{-1}AP$ es diagonal. Entonces una raíz cuadrada de A es

$$A^{\frac{1}{2}} = PD^{\frac{1}{2}}P^{-1} \tag{12}$$

donde $D^{\frac{1}{2}}$ es definida como en (11).

Demostración

La demostración consiste en un cálculo directo,

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}\right)\left(PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}\right) = P\left(D^{\frac{1}{2}}\right)^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Así, queda el teorema probado.

Ejemplo 2.5. Determine las raíces cuadradas de la matriz dada en el Ejemplo 2.2.

Solución

La matriz A se puede expresar como

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{3}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Al tomar todas las raíces positivas de los valores propios, se tiene

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 4 & 13 & -1 \\ -4 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la cual coincide con la obtenida en (8). Para obtener las otras raíces cuadradas de la matriz A, se modifican los elementos de $D^{\frac{1}{2}}$ por las raíces negativas de los valores propios, como se muestra a continuación

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 3 & 12 & -3 \\ 4 & 13 & -1 \\ -44 & 28 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{cuando} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 12 & 3 & -3 \\ 28 & -44 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{tomando} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 3 & 12 & -3 \\ 12 & 3 & -3 \\ -12 & -12 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{asumiendo} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nótese que la última matriz es la negativa de la obtenida en (9). La forma general de $A^{\frac{1}{2}}$, es como sigue

$$\frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 5\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 8 & -4\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta + 8 & \cos\theta + \operatorname{sen}\theta - 2 \\ 4\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta + 8 & -5\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 8 & -\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - 2 \\ 36\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 8 & -36\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 8 & 8\operatorname{sen}\theta + 2 \end{bmatrix}.$$

Para valores notables de θ se tiene

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 13 & 4 & -1 \\ 12 & 3 & -3 \\ 28 & -44 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{tomando} \qquad \theta = 0,$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 4 & 13 & -1 \\ 13 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{asumiendo} \qquad \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 3 & 12 & -3 \\ 4 & 13 & -1 \\ -44 & 28 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \pi,$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix} 12 & 3 & -3 \\ 3 & 12 & -3 \\ -12 & -12 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{considerando} \qquad \theta = 3\frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 2.6. Determine las raíces cuadradas de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & -2 & -11 \\ 7 & 11 & -5 & 12 \\ -10 & -3 & 16 & -1 \\ -3 & 4 & 7 & 15 \end{bmatrix}.$$

Solución

Para la matriz A se tiene que el polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 - 54\lambda^3 + 969\lambda^2 - 6676\lambda + 14400.$$

Utilizando el método de división sintética, se obtiene que los valores propios son

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 9, \qquad \lambda_3 = 16, \qquad \lambda_4 = 25.$$

La matriz A se puede expresar como

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Como A tiene 4 valores propios distintos no nulos, entonces posee $2^4 = 16$ raíces cuadradas, al tomar todas las raíces positivas de los valores propios

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 9 & -3 & 6 \\ -4 & -1 & 12 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Para obtener las otras raíces cuadradas de la matriz A, se modifican los elementos de $D^{\frac{1}{2}}$ por las raíces negativas de los valores propios, como se muestra a continuación

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & 9 & 8 & -13 \\ 3 & -3 & -15 & 18 \\ -4 & 3 & 16 & -5 \\ -1 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{cuando} \quad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & -17 & -18 & -5 \\ 21 & 27 & 15 & 6 \\ -22 & -19 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{tomando} \quad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & -6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{asumiendo} \quad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 5 \\ 3 & 9 & -3 & 6 \\ 6 & -1 & 2 & -11 \\ 9 & 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Nótese que en la matriz $D^{\frac{1}{2}}$ se ha modificado sólo un valor propio, ahora se consideran las raíces cuadradas de A cuando se cambian dos valores propios.

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & -9 & -10 & -13 \\ 21 & 15 & 3 & 18 \\ -22 & -15 & -2 & -5 \\ -1 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{cuando} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 18 & 17 & 8 & -5 \\ -21 & -27 & -15 & -6 \\ 12 & 19 & 16 & 11 \\ -9 & -2 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{tomando} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{asumiendo} \qquad D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Se puede verificar que estas 8 matrices y sus respectivas matrices negativas son las 16 raíces cuadradas de A, elevando cada una al cuadrado.

Teorema 2.7. Sea $T = [t_{ij}]$ una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$, con a lo más un elemento nulo en la diagonal. Entonces existe $T^{\frac{1}{2}} = [\tau_{ij}]$ y sus elementos cumplen que

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \sqrt{t_{ii}} & j = i, \\ \dfrac{t_{ij}}{\tau_{ii} + \tau_{jj}} & j = i+1, \\ \dfrac{1}{\tau_{ii} + \tau_{jj}} \left(t_{ij} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} \tau_{ik}\tau_{kj} \right) & j > i+1. \end{cases} \tag{13}$$

Demostración

La demostración es por inducción sobre n. Vamos a demostrar que si los elementos dados en (13) son las entradas de la raíz cuadrada de T, entonces

$$T = \left(T^{\frac{1}{2}}\right)\left(T^{\frac{1}{2}}\right).$$

Si $n = 1$, $T = [t]$ es una matriz real de tamaño 1×1 que es triangular, luego

$$\left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left[\sqrt{t}\right]^2 = [t] = T.$$

Para $n = 2$ se tiene que

$$\left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{t_{11}} & \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}}+\sqrt{t_{22}}} \\ 0 & \sqrt{t_{22}} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12}\frac{\sqrt{t_{11}}+\sqrt{t_{22}}}{\sqrt{t_{11}}+\sqrt{t_{22}}} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} = T.$$

Supóngase que es cierto para todas las matrices triangulares de orden $n-1$, es decir, existe una matriz de tamaño $(n-1)\times(n-1)$,

$$T_{n-1}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & \dots & \tau_{1n-1} \\ 0 & \tau_{22} & \tau_{23} & \dots & \tau_{2n-1} \\ 0 & 0 & \tau_{33} & \dots & \tau_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{n-1\ n-1} \end{bmatrix}$$

tal que $\left(T_{n-1}^{\frac{1}{2}}\right)^2 = T_{n-1}$. Como una matriz triangular T de orden n, se puede particionar como

$$T = \begin{bmatrix} T_{n-1} & \vdots & \vec{U} \\ \cdots & . & \cdots \\ \vec{0}^t & \vdots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

donde

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{n-1n} \end{bmatrix},$$

por la hipótesis de inducción

$$T^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} T_{n-1}^{\frac{1}{2}} & \vdots & \vec{c} \\ \cdots & . & \cdots \\ \vec{0}^t & \vdots & \tau_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad \tau_{nn} = \sqrt{t_{nn}},$$

y

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \vdots \\ \tau_{n-1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{11}+\tau_{nn}}\left(t_{1n} - \sum_{k=2}^{n-1}\tau_{1k}\tau_{kn}\right) \\ \frac{1}{\tau_{22}+\tau_{nn}}\left(t_{2n} - \sum_{k=3}^{n-1}\tau_{2k}\tau_{kn}\right) \\ \vdots \\ \frac{t_{n-1\ n}}{\tau_{n-1\ n-1}+\tau_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \begin{bmatrix} T_{n-1}^{\frac{1}{2}} & \vdots & \vec{c} \\ \cdots & . & \cdots \\ \vec{0}^t & \vdots & \tau_{nn} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} T_{n-1} & \vdots & \left(T_{n-1}^{\frac{1}{2}} + \tau_{nn} I_{n-1}\right)\vec{c} \\ \cdots & . & \cdots\cdots\cdots \\ \vec{0}^t & \vdots & \tau_{nn}^2 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $\left(T_{n-1}^{\frac{1}{2}} + \tau_{nn} I_{n-1}\right)\vec{c} = \vec{U}$, ya que

$$\begin{bmatrix} (\tau_{11}+\tau_{nn}) & \tau_{12} & \tau_{13} & \cdots & \tau_{1n-1} \\ 0 & (\tau_{22}+\tau_{nn}) & \tau_{23} & \cdots & \tau_{2n-1} \\ 0 & 0 & (\tau_{33}+\tau_{nn}) & \cdots & \tau_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\tau_{n-1\ n-1}+\tau_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \\ \vdots \\ \tau_{n-1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ t_{3n} \\ \vdots \\ t_{n-1n} \end{bmatrix}.$$

Esto completa la prueba.

Observación

Si todos los elementos de la diagonal de T son nulos, entonces T no tiene raíz cuadrada.

Ejemplo 2.7. Determine una raíz cuadrada para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 27 & 19 \\ 0 & 9 & 21 & 22 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

Solución

Usando el procedimiento descrito en (13), se tiene que

$$\begin{aligned} &\tau_{11} = \sqrt{t_{11}} = 2, && \tau_{22} = \sqrt{t_{22}} = 3, && \tau_{33} = \sqrt{t_{33}} = 4, \\ &\tau_{44} = \sqrt{t_{44}} = 5, && \tau_{12} = \frac{t_{12}}{\tau_{11}+\tau_{22}} = 3, && \tau_{23} = \frac{t_{23}}{\tau_{22}+\tau_{33}} = 3, \\ &\tau_{34} = \frac{t_{34}}{\tau_{33}+\tau_{44}} = 2, && \tau_{13} = \frac{t_{13}-(\tau_{12}\tau_{23})}{\tau_{11}+\tau_{33}} = 3, && \tau_{24} = \frac{t_{24}-(\tau_{23}\tau_{34})}{\tau_{22}+\tau_{44}} = 2, \end{aligned}$$

finalmente

$$\tau_{14} = \frac{t_{14}-(\tau_{12}\tau_{24}+\tau_{13}\tau_{34})}{\tau_{11}+\tau_{44}} = 1.$$

Luego,

$$A^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

El lector puede verificar que $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$.

Teorema 2.8. Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$ con valores propios reales (a lo más uno igual a cero) y sea P una matriz no singular tal que la matriz $T = P^{-1}AP$ es triangular. Entonces una raíz cuadrada de A es

$$A^{\frac{1}{2}} = PT^{\frac{1}{2}}P^{-1} \tag{14}$$

donde los elementos de $T^{\frac{1}{2}}$ están dados en (13).

Demostración

La demostración consiste en un cálculo directo

$$\left(PT^{\frac{1}{2}}P^{-1}\right)\left(PT^{\frac{1}{2}}P^{-1}\right) = P\left(T^{\frac{1}{2}}\right)^2 P^{-1} = PTP^{-1} = A.$$

Así, queda el teorema probado.

Ejemplo 2.8. Determine las raíces cuadradas para la matriz dada a continuación

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

El polinomio característico de la matriz A es

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16.$$

Entonces, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ (de multiplicidad algebraica 2) y los vectores propios correspondientes son

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar un vector propio generalizado $\vec{v}_3$ se calcula $(A-4I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$ y se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Al realizar operaciones por fila se llega a, $x = -z-1$ y $y = z$. Si se hace $z = 0$, se obtiene el vector propio generalizado: $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego, la matriz A se puede expresar como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Por lo tanto, una raíz cuadrada de A es

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 & -4 & 5 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

otra raíz de A es

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 & -12 & 13 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & 12 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Las respectivas negativas de estas dos matrices también son raíces.

Hasta ahora se han considerado las raíces cuadradas de matrices diagonalizables o triangularizables, pero como algunas matrices no se pueden factorizar de esta manera a continuación se muestran algunos métodos para obtener las raíces cuadradas de una matriz.

Teorema 2.9. Si A es una matriz real de tamaño 2×2 con al menos un valor propio no nulo, entonces su raíz cuadrada es

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\left[A+\left(\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\right)I\right], \tag{15}$$

donde $\lambda_i = \frac{1}{2}\left(tr(A)\pm\sqrt{tr^2(A)-4\det(A)}\right)$.

Demostración

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, luego, si la matriz dada en (15), es la raíz cuadrada de A, entonces $A=\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\begin{aligned}\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\right)^2\begin{bmatrix} a+\sqrt{\det(A)} & b\\ c & d+\sqrt{\det(A)}\end{bmatrix}^2\\ &=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\begin{bmatrix} a^2+ad+2a\sqrt{\det(A)} & ba+bd+2b\sqrt{\det(A)}\\ ca+cd+2c\sqrt{\det(A)} & da+d^2+2d\sqrt{\det(A)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

De este modo,

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{(a+d)+2\sqrt{\det(A)}}{\lambda_1+\lambda_2+2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

Pero dado que

$$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2 \qquad \text{y} \qquad \det(A)=\lambda_1\lambda_2,$$

se tiene que,

$$\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A.$$

Lo cual completa la prueba.

Ejemplo 2.9. Determine para cada una de las siguientes matrices una raíz cuadrada

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

Solución

- Para la matriz A se tiene que

$$\lambda_1=\lambda_2=2,$$

como A tiene un único valor propio no nulo, entonces posee $2^1 = 2$ raíces cuadradas. Una raíz cuadrada, es

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2+2 & 1 \\ 0 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

y multiplicando por -1 se obtiene la otra raíz. El lector puede verificar que $\left(\pm A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$.

- Para la matriz B se tiene que

$$\lambda_1 = 4+2i, \qquad \lambda_2 = 4-2i.$$

Como los valores propios de A son complejos, entonces sus raíces son

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{4+2i} = (-1)^k \left[\sqrt{2+\sqrt{5}} + \sqrt{2-\sqrt{5}}\right], \qquad k = 0, 1$$
$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{4-2i} = (-1)^k \left[\sqrt{2+\sqrt{5}} - \sqrt{2-\sqrt{5}}\right], \qquad k = 0, 1$$

Si se considera el caso $k = 0$ en ambas raíces, se tiene que

$$\sqrt{4+2i} + \sqrt{4-2i} = 2\sqrt{2+\sqrt{5}}, \qquad \sqrt{4+2i}\sqrt{4-2i} = 2\sqrt{5}.$$

Luego, la matriz B posee $2^2 = 4$ raíces cuadradas. Una raíz cuadrada de B es

$$B^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 4+2\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 4+2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+2} & \sqrt{\sqrt{5}-2} \\ -\sqrt{\sqrt{5}-2} & \sqrt{\sqrt{5}+2} \end{bmatrix}.$$

Nótese que $-B^{\frac{1}{2}}$ también es raíz, lo cual se puede verificar ya que

$$\begin{aligned}\left(\pm B^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= (\pm 1)^2 \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+2} & \sqrt{\sqrt{5}-2} \\ -\sqrt{\sqrt{5}-2} & \sqrt{\sqrt{5}+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+2} & \sqrt{\sqrt{5}-2} \\ -\sqrt{\sqrt{5}-2} & \sqrt{\sqrt{5}+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora se considera $k = 1$ en la raíz cuadrada de uno de los valores propios, en este caso, se tiene que

$$\sqrt{4+2i} - \sqrt{4-2i} = 2\sqrt{2-\sqrt{5}}, \qquad \sqrt{4+2i}\left(-\sqrt{4-2i}\right) = -2\sqrt{5}.$$

Por lo tanto, otra raíz cuadrada de B es

$$B^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 4-2\sqrt{5} & 2 \\ -2 & 4-2\sqrt{5} \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{5}-2} & -\sqrt{\sqrt{5}+2} \\ \sqrt{\sqrt{5}+2} & \sqrt{\sqrt{5}-2} \end{bmatrix}.$$

En este caso, $-B^{\frac{1}{2}}$ también es raíz, el lector puede veficarlo.

Teorema 2.10. Si A es una matriz de componentes reales de tamaño 3×3 con a lo más un valor propio nulo, entonces sus raíces cuadradas son

$$A^{\frac{1}{2}} = [A+\alpha I]^{-1}\left[\beta A + \left(\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}\right) I\right], \tag{16}$$

donde $\alpha = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\left(\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}\right)$ y $\beta = \sum_{k=1}^{3}\sqrt{\lambda_k}$

El teorema es válido para cualquier matriz, sin embargo la prueba que se presenta en estas notas es únicamente para matrices triangularizables.

Demostración

Supongamos que A es una matriz cuadrada con valores propios reales. Por el Teorema de Schur es semejante a una matriz triangular superior T, luego, puede expresarse como

$$A = QTQ^t, \tag{17}$$

donde Q es una matriz ortogonal y

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Con $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ los valores propios de A. Al reemplazar (17) en (16), se tiene que

$$\begin{aligned} [A+\alpha I]^{-1}\left[\beta A + \sqrt{\det A} I\right] &= \left[QTQ^t + \alpha I\right]^{-1}\left[\beta\left(QTQ^t\right) + \sqrt{\det\left(QTQ^t\right)} I\right] \\ &= \left[Q\left(T+\alpha I\right)Q^t\right]^{-1}\left[Q\left(\beta T + \sqrt{\det T} I\right)Q^t\right] \\ &= Q\left[T+\alpha I\right]^{-1} Q^t Q\left[\beta T + \sqrt{\det T} I\right] Q^t \\ &= Q\left[T+\alpha I\right]^{-1}\left[\beta T + \sqrt{\det T} I\right] Q^t. \end{aligned}$$

Es decir, al utilizar la descomposición de Schur, se llega a que

$$A^{\frac{1}{2}} = QT^{\frac{1}{2}}Q^t.$$

Luego, se debe demostrar que

$$T^{\frac{1}{2}} = [T+\alpha I]^{-1}\left[\beta T + \sqrt{\det T}I\right], \tag{19}$$

Para ello, se factorizan α y β, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\alpha =&\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3} = \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\lambda_1\\ =&\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\lambda_2 = \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\lambda_3\end{aligned}$$

y

$$\beta = \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3} = \frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}} =$$
$$\frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_3}}.$$

Por lo tanto,

$$T+\alpha I = \begin{bmatrix}\lambda_1 & a & b\\ 0 & \lambda_2 & c\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} + \left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1\lambda_3}+\sqrt{\lambda_2\lambda_3}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix}\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right) & a & b\\ 0 & \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right) & c\\ 0 & 0 & \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\end{bmatrix},$$

si se hace $\xi = \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)$, entonces

$$T+\alpha I = \xi\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}} & \frac{a}{\xi} & \frac{b}{\xi}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}} & \frac{c}{\xi}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\end{bmatrix},$$

luego, su inversa es

$$(T+\alpha I)^{-1} = \frac{1}{\xi}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3} & -\frac{a}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \frac{ac}{\xi}-\frac{b}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}\\ 0 & \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3} & -\frac{c}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Por otra parte,

$$\beta T + \sqrt{\det T}I = \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_2}\right)\begin{bmatrix}\lambda_1 & a & b\\ 0 & \lambda_2 & c\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} + \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

la cual en términos de ξ, se puede expresar como

$$\beta T+\sqrt{\det T}I=\xi\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}} & a\frac{\beta}{\xi} & b\frac{\beta}{\xi}\\ 0 & \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}} & c\frac{\beta}{\xi}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\end{bmatrix}, \tag{21}$$

Al reemplazar las matrices obtenidas en (20) y (21), en la expresión (19), se tiene

$$T^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}-\frac{ac}{\xi}\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \frac{c}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3}\end{bmatrix}.$$

El lector puede verificar que los elementos de esta última matriz coinciden con los dados en el teorema 2.7.

Ejemplo 2.10. Determine una raíz cuadrada de la matriz dada en el Ejemplo 2.2.

Solución

Como los valores propios son

$$\lambda_1=3, \qquad \lambda_2=3, \qquad \lambda_3=12.$$

Al considerar las raíces positivas de los valores propios se tiene que

$$\alpha=15 \qquad \text{y} \qquad \beta=4\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, una raíz cuadrada de A es

$$A^{\frac{1}{2}}=[A+15I]^{-1}\left[4\sqrt{3}A+6\sqrt{3}I\right],$$

al reemplazar la matriz se tiene

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}}&=2\sqrt{3}\begin{bmatrix}22&4&-1\\4&22&-1\\-4&-4&19\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}17&8&-2\\8&17&-2\\-8&-8&11\end{bmatrix}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{486}\begin{bmatrix}23&-4&1\\-4&23&1\\4&4&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17&8&-2\\8&17&-2\\-8&-8&11\end{bmatrix}\\&=\frac{\sqrt{3}}{9}\begin{bmatrix}13&4&-1\\4&13&-1\\-4&-4&10\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Recordemos que $-A^{\frac{1}{2}}$ también era raíz.

Ejemplo 2.11. Determine una raíz cuadrada de la matriz dada en el Ejemplo 2.8.

Solución

Como los valores propios son

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = 4.$$

Luego A tiene 2 valores propios distintos no nulos, entonces posee $2^2 = 4$ raíces cuadradas. Si se consideran las raíces positivas de los valores propios se tiene que

$$\alpha = 4 + 2\sqrt{4} = 8 \qquad \text{y} \qquad \beta = 1 + 2\sqrt{4} = 5.$$

Por lo tanto, una raíz cuadrada de A es

$$A^{\frac{1}{2}} = [A + 8I]^{-1}\left[5A + \sqrt{16}I\right],$$

al reemplazar la matriz se tiene

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} 13 & -3 & 4 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29 & -15 & 20 \\ -5 & 24 & -5 \\ -5 & 15 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 11 & 4 & -5 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & -4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 & -15 & 20 \\ -5 & 24 & -5 \\ -5 & 15 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & -4 & 5 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Recordemos que $-A^{\frac{1}{2}}$ también era raíz.

Teorema 2.11. Si A es una matriz de componentes reales de tamaño 4×4 con a lo más un valor propio nulo, entonces sus raíces cuadradas son

$$A^{\frac{1}{2}} = [\alpha A + \beta I]^{-1}\left[A^2 + \gamma A + \left(\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\lambda_4}\right) I\right] \tag{22}$$

donde $\alpha = \sum_{k=1}^{4} \sqrt{\lambda_k}$, $\beta = \sum_{k>j>i} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_k}$ y $\gamma = \sum_{j>i} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}$

Demostración

Supongamos que A es una matriz cuadrada con valores propios reales. Por el Teorema de Schur es semejante a una matriz triangular superior T, luego, puede expresarse como

$$A = QTQ^t, \tag{23}$$

donde Q es una matriz ortogonal y

$$T=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a & b & c\\ 0 & \lambda_2 & d & e\\ 0 & 0 & \lambda_3 & f\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Con $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ los valores propios de A. Al reemplazar (23) en (22), se tiene que

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}} &= \left[\alpha QTQ^t+\beta I\right]^{-1}\left[\left(QTQ^t\right)^2+\gamma QTQ^t+\sqrt{\det\left(QTQ^t\right)}I\right]\\ &= \left[Q\left(\alpha T+\beta I\right)Q^t\right]^{-1}\left[Q\left(T^2+\gamma T+\sqrt{\det T}I\right)Q^t\right]\\ &= Q\left[\alpha T+\beta I\right]^{-1}Q^tQ\left[T^2+\gamma T+\sqrt{\det T}I\right]Q^t\\ &= Q\left[\alpha T+\beta I\right]^{-1}\left[T^2+\gamma T+\sqrt{\det T}I\right]Q^t.\end{aligned}$$

Es decir, al utilizar la descomposición de Schur, se llega a que

$$A^{\frac{1}{2}}=QT^{\frac{1}{2}}Q^t.$$

Luego, se debe demostrar que

$$T^{\frac{1}{2}}=\left[\alpha T+\beta I\right]^{-1}\left[T^2+\gamma T+\sqrt{\det T}I\right].$$

Para ello, se calculan $\alpha,\ \beta$ y γ, como sigue

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4},\\ \beta &= \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_4}+\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\lambda_4}+\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\lambda_4},\\ \gamma &= \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_4}+\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_4}+\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\lambda_4}.\end{aligned}$$

Luego

$$\alpha A+\beta I=\begin{bmatrix}\omega_1 & a\alpha & b\alpha & c\alpha\\ 0 & \omega_2 & d\alpha & e\alpha\\ 0 & 0 & \omega_3 & f\alpha\\ 0 & 0 & 0 & \omega_4\end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}\right),\\ \omega_2 &= \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}\right),\\ \omega_3 &= \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}\right)\left(\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}\right),\\ \omega_4 &= \left(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}\right)\left(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}\right)\left(\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}\right).\end{aligned}$$

la inversa de la matriz $\alpha A+\beta I$, es

$$\frac{1}{\xi}\begin{bmatrix} \tau_1 & -a\alpha\frac{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \alpha\frac{\alpha ad-\omega_2 b}{\tau_4} & -\alpha\frac{\alpha^2 adf-\alpha\omega_3 ae-\alpha\omega_2 bf+\omega_2\omega_3 c}{\xi} \\ 0 & \tau_2 & -d\alpha\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}} & \alpha\frac{d\alpha f-e\omega_3}{\tau_1} \\ 0 & 0 & \tau_3 & -f\alpha\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}} \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 \end{bmatrix},$$

donde

$$\tau_1=\omega_2\frac{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}=\omega_3\frac{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}=\omega_4\frac{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}},$$
$$\tau_2=\omega_1\frac{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}=\omega_3\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}=\omega_4\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}},$$

$$\tau_3=\omega_1\frac{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}=\omega_2\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}=\omega_4\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}},$$
$$\tau_4=\omega_1\frac{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}=\omega_2\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}}=\omega_3\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}},$$
$$\xi=\omega_1\tau_1=\omega_2\tau_2=\omega_3\tau_3=\omega_4\tau_4.$$

Por otra parte,

$$T^2=\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & a(\lambda_1+\lambda_2) & b(\lambda_1+\lambda_3)+ad & c(\lambda_1+\lambda_4)+ae+bf \\ 0 & \lambda_2^2 & d(\lambda_2+\lambda_3) & e(\lambda_2+\lambda_4)+df \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & f(\lambda_3+\lambda_4) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, la matriz $T^2+\gamma T+\sqrt{\det(T)}I$, es igual a

$$\begin{bmatrix} \omega_1\sqrt{\lambda_1} & a\alpha\sqrt{\lambda_2}+\frac{a\omega_1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & b\alpha\sqrt{\lambda_3}+\frac{b\omega_1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}+ad & c\alpha\sqrt{\lambda_4}+\frac{c\omega_1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}+ae+bf \\ 0 & \omega_2\sqrt{\lambda_2} & d\alpha\sqrt{\lambda_3}+\frac{d\omega_2}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}} & e\alpha\sqrt{\lambda_4}+\frac{e\omega_2}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}}+df \\ 0 & 0 & \omega_3\sqrt{\lambda_3} & f\alpha\sqrt{\lambda_4}+\frac{f\omega_3}{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4\sqrt{\lambda_4} \end{bmatrix}.$$

Al realizar los respectivos productos, se llega a

$$T^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_3}}-\frac{ad}{\tau_4} & \frac{c}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_4}}-\frac{bf}{\tau_2}-\frac{ae}{\tau_3}+adf\frac{\alpha}{\xi} \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \frac{d}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_3}} & \frac{e}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_4}}-\frac{df}{\tau_1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \frac{f}{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_4}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} \end{bmatrix}.$$

El lector puede verificar que los elementos de esta última matriz coinciden con los dados en el teorema 2.7.

Ejemplo 2.12. Determine mediante el método descrito en el Teorema 2.11 una raíz cuadrada para la matriz dada en el Ejemplo 2.6.

Solución

Como en el Ejemplo 2.6, se obtuvieron los valores propios de A, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25} = 14,\\ \beta &= \sqrt{4}\sqrt{9}\sqrt{16}+\sqrt{4}\sqrt{9}\sqrt{25}+\sqrt{4}\sqrt{16}\sqrt{25}+\sqrt{9}\sqrt{16}\sqrt{25} = 154,\\ \gamma &= \sqrt{4}\sqrt{9}+\sqrt{4}\sqrt{16}+\sqrt{4}\sqrt{25}+\sqrt{9}\sqrt{16}+\sqrt{9}\sqrt{25}+\sqrt{16}\sqrt{25} = 71.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $\alpha A+\beta I$, es

$$\begin{bmatrix} 322 & 14 & -28 & -154\\ 98 & 308 & -70 & 168\\ -140 & -42 & 378 & -14\\ -42 & 56 & 98 & 364\end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la matriz $A^2+\gamma A+\sqrt{\det A}I$, es

$$\begin{bmatrix} 1176 & 56 & -280 & -1064\\ 672 & 1092 & -420 & 1092\\ -1008 & -308 & 1540 & -28\\ -336 & 364 & 700 & 1484\end{bmatrix}.$$

Luego, la raíz cuadrada de A es

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{22680}\begin{bmatrix} 76 & -11 & -6 & 37\\ -21 & 87 & 27 & -48\\ 26 & 5 & 60 & 11\\ 5 & -16 & -21 & 71\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1176 & 56 & -280 & -1064\\ 672 & 1092 & -420 & 1092\\ -1008 & -308 & 1540 & -28\\ -336 & 364 & 700 & 1484\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & -5\\ 3 & 9 & -3 & 6\\ -4 & -1 & 12 & -1\\ -1 & 2 & 3 & 11\end{bmatrix},\end{aligned}$$

la cual coincide con una de las obtenidas en el Ejemplo 2.6.

Teorema 2.12. Si A es una matriz real de tamaño $n\times n$ ($n \geq 5$), con una descomposición de la forma $A = PBP^{-1}$, entonces sus raíces cuadradas se calculan de la siguiente manera

$$A^{\frac{1}{2}} = PB^{\frac{1}{2}}P^{-1} = P \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} P^{-1}, \tag{25}$$

en donde cada submatriz B_t es de tamaño 1×1, 2×2, 3×3 ó 4×4, de tal manera que se le pueda calcular a cada bloque una raíz cuadrada como las dadas en (15), (16) ó (22) respectivamente.

Demostración

Queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 2.13. Determine una raíz cuadrada para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Para la matriz A se tiene que el polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda,$$

luego, se tiene que

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 4 + 2i, \qquad \lambda_3 = 4 - 2i,$$

como A tiene valores propios complejos, entonces se puede factorizar de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Luego, la raíz cuadrada de A es

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si se usa una de las raíces cuadradas encontradas en el Ejemplo 2.9, se tiene que

$$
\begin{aligned}
A^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4\sqrt{2+\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+2\sqrt{5} & 2\\ -2 & 4+2\sqrt{5}\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \quad 0\end{matrix} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{5}+1 & 2\sqrt{5}+3 & 1\\ -8-3\sqrt{5} & -4-\sqrt{5} & \sqrt{5}+2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\begin{bmatrix} 8+3\sqrt{5} & 4+\sqrt{5} & -2-\sqrt{5}\\ -7-\sqrt{5} & \sqrt{5}-1 & 3+\sqrt{5}\\ 1+2\sqrt{5} & 3+2\sqrt{5} & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Se puede fácilmente verificar que $\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 = A$

$$
\begin{aligned}
\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\right)^2\begin{bmatrix} 8+3\sqrt{5} & 4+\sqrt{5} & -2-\sqrt{5}\\ -7-\sqrt{5} & \sqrt{5}-1 & 3+\sqrt{5}\\ 1+2\sqrt{5} & 3+2\sqrt{5} & 1\end{bmatrix}^2\\
&= \frac{1}{4\left(2+\sqrt{5}\right)}\begin{bmatrix} 64+32\sqrt{5} & 32+16\sqrt{5} & -16-8\sqrt{5}\\ -56-28\sqrt{5} & -8-4\sqrt{5} & 24+12\sqrt{5}\\ 8+4\sqrt{5} & 24+12\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2\\ -7 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

Asmar, A. y Menco, J. (1995), ‘Acerca de la raíz cuadrada de una matriz’, *Revista de la Facultad de Ciencias* **5**(1), 89–95. Universidad Nacional de Colombia, sede: Medellín.

Bôcher, M. (1907), *Introduction to Higher Algebra*, The Macmillan Company, New York.

Cayley, A. (1858), ‘A memoir on the theory of matrices’, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **148**, 17–37.

Frazer, R.A. Duncan, W. y. C. A. (1965), *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations*, The Syndics of the Cambridge University Press, USA.

Jiménez, J. A. (2004), *Álgebra Lineal II (Con Aplicaciones en Estadística). Colección Notas de Clase de la Facultad de Ciencias*, Universidad Nacional de Colombia, sede: Bogotá.

MacDuffee, C. C. (1956), *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.

Roth, W. E. (1928), 'A solution of the matric equation $p(x) = a$', *Transactions of the American Mathematical Society* **30**(3), 579–596.

Utz, W. R. (1979), 'The matric equation $x^2 = a$', *The American Mathematical Monthly* **86**(10), 855–856.