# GEOGEBRA COMO RECURSO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO. CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA QUE PASA POR CUATRO PUNTOS.

Adolfo Galindo Borja.
Grupo Pedagógico Cambiemos, Instituto GeoGebra Tolima

*Resumen - El objetivo de este documento es mostrar a GeoGebra como recurso pedagógico para el aprendizaje de la Geometría del espacio, ilustrando el proceso con un ejemplo, "la construcción de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos". GeoGebra facilita la visualización de objetos matemáticos y la comprensión de procedimientos por parte de los estudiantes, debido a su carácter dinámico y a sus diferentes representaciones, las cuales permiten abordar en paralelo y en forma complementaria la situación problema. Presentamos la construcción de la superficie esférica por tres caminos o métodos diferentes, utilizando una variedad de herramientas y comandos y describiendo los pasos didácticos para su enseñanza- aprendizaje. Los dos primeros métodos se llevan a cabo fundamentalmente en la Vista 3D y el último en la Vista Hoja de Cálculo y la Vista CAS. El primer método, el más corto, nos permite solucionar la situación con unas pocas acciones y herramientas muy usuales, el segundo, consideramos que es un buen ejercicio para comprender y aplicar los vectores, sobre todo el producto vectorial y además incluye la creación de una herramienta para su ejecución automática; el tercero pone en acción el álgebra matricial. Existen, por supuesto, otras formas de abordar y acortar las construcciones, pero en esta oportunidad y por motivos didácticos no las hemos considerado. Anexamos los tutoriales para las construcciones y los enlaces de los respectivos videos.*

*Palabras clave: GeoGebra 3D, Esfera por cuatro puntos, producto vectorial con GeoGebra*

## 1. Introducción

Es paradójico que siendo el contexto natural de los estudiantes el mundo real, el cual es tridimensional, la Educación Básica y Media de nuestra región se centre en la geometría plana descuidando en forma notable la geometría del espacio, reduciendo de esta manera las posibilidades de un mejor desarrollo del pensamiento espacial en los educandos. Esto puede ser causado por la dificultad que presenta para estudiantes y docentes el representar objetos tridimensionales en superficies planas como una hoja de papel o el pizarrón del aula de clase y las dificultades que presentan los gráficos estáticos para observar las figuras desde diferentes puntos de vista. Esta situación cambia de forma significativa cuando se utiliza un software como GeoGebra que además de ser de fácil manejo, libre y gratuito, permite realizar construcciones 3D en forma dinámica, muy atractivas para los estudiantes. Además, GeoGebra es algo más que un instrumento de ampliación del conocimiento, Luis Moreno Armella en su artículo Instrumentos Matemáticos Computacionales (2001) afirma:

> En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta. Como cuando ya no podemos distinguir entre el pianista y el piano a la hora de la ejecución. El piano "forma parte" del pianista. La herramienta se ha tornado en un instrumento. Cuando hablamos de las calculadoras, diremos que la calculadora se ha tornado un instrumento matemático. Es decir, cuando tiene efectos de re-organización conceptual. Cuando la herramienta se torne instrumento, estaremos ante los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción. (p.86)

No hay que pasar por alto que la incorporación de recursos digitales como GeoGebra, aportando movimiento y plasticidad a la geometría, entra en conflicto con las prácticas matemáticas y didácticas de los docentes formados en ambientes geométricos estáticos y con modelos pedagógicos institucionales que no están diseñados para la inclusión de este tipo de nuevas tecnologías, haciendo que los intentos al respecto terminen en yuxtaposiciones que no encajan completamente en las didácticas establecidas y son difíciles de sostener en el tiempo. Martín Eduardo Gempeler (2010), desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico formulada por Yves Chevallard y refiriéndose a los docentes y la incorporación de geometrías dinámicas en el aula de matemáticas escribe:

> No son resistencias únicamente psicológicas, casi instintivas; tienen razones para resistirse a utilizar los nuevos ostensivos, pues esa utilización implica una desconstrucción de sus prácticas matemáticas y didácticas. En efecto, los nuevos ostensivos implican el desarrollo de nuevas praxeologías matemáticas y didácticas, que entran en conflicto con las praxeologías habituales de los profesores, praxeologías basadas en ostensivos estáticos. Existe un conflicto de praxeologías matemáticas: una praxeología estática y una praxeología dinámica. Primero que todo, por el hecho del dinamismo de los objetos ostensivos en el software, los profesores deben construir nuevos objetos no ostensivos que les sirvan para controlar la manipulación de los ostensivos dinámicos. Aunque podría pensarse que esta construcción se hace de manera natural y fácilmente, en realidad esta construcción demanda un esfuerzo consciente y sostenido para evitar una simple yuxtaposición de no ostensivos estáticos. En segundo lugar, la praxeología estática se caracteriza por el uso del ajuste perceptivo, tanto en las construcciones como en las validaciones. La praxeología dinámica, por su parte, excluye el ajuste perceptivo como estrategia de construcción o de validación….En este caso no se trata solamente de asimilar nuevos objetos, sino de abandonar estrategias que han sido validadas en la práctica, y por lo tanto requiere una atención especial, trabajando situaciones en las que se invalidan dichas estrategias válidas para la praxeología estática, y se reflexione sobre esta invalidación. (p. 71 y p.72)

La posibilidad que ofrece GeoGebra de representar un mismo objeto de estudio en diferentes Vistas (sistema de representación gráfico, tabular algebraico y de cálculo simbólico, en este caso) que están interconectadas y pueden ser observadas en forma simultánea, facilita el proceso de aprendizaje. Con GeoGebra se realizan los procesos cognitivos de visualización, razonamiento y construcción de manera sincronizada permitiendo al estudiante la validación continua de su acción sobre el objeto de estudio.

Entre las ventajas que ofrece GeoGebra en la enseñanza de la geometría del espacio nos permitimos resaltar:

1. Visualizar alternativas y conjeturas en un momento de la construcción y verificar gráficamente si cumplen las condiciones requeridas.
2. Comparar lo obtenido gráficamente con sus respectivas equivalencias en los otros sistemas de representación o Vistas que ofrece el software
3. Observar el comportamiento de un elemento de la construcción cuando se modifican otros elementos de ella.
4. Plantear casos particulares y determinar el grado de interés o de utilidad.
5. Plantearse nuevas alternativas y explorar en busca de las herramientas conceptuales y del software para hacerlas posible.

2. Metodología

Tabla 1
Las etapas de cada uno de los métodos de solución

| ETAPAS | METODO 1 | METODO 2 | METODO 3 |
|---|---|---|---|
| Diagnóstico mediante problemas previos | • Conocimientos de la disciplina<br>• Herramientas de GeoGebra<br>Problemas 1, 2, 3, 4 | • Conocimientos de la disciplina<br>• Herramientas de GeoGebra<br>Problemas 6, 7, y 8 | • Conocimientos de la disciplina<br>• Herramientas de GeoGebra<br>Problema 10<br>Tutorial 4 |
| Solución del problema central: la esfera por cuatro puntos | Figura 4 | Figura 6 | Figura 9 |
| Estrategias que pueden ser utilizadas | • Exploración del software<br>• Video-tutorial | • Exploración del software<br>• Video-tutorial | • Exploración del software<br>• Video-tutorial |
| Problemas de ampliación y aplicación | Problema 5 | Problema 9 | Problema 11 |

*Método 1: Con herramientas de uso frecuente en GeoGebra*

Antes de abordar el problema de la superficie esférica por cuatro puntos es conveniente proponer problemáticas como las que a continuación se formulan, que nos servirán como diagnóstico de los pre-saberes en la parte conceptual y gráfica. Posiblemente los estudiantes no encuentren las soluciones en el momento inicial pero se irán precisando a medida que se avanza en el proceso

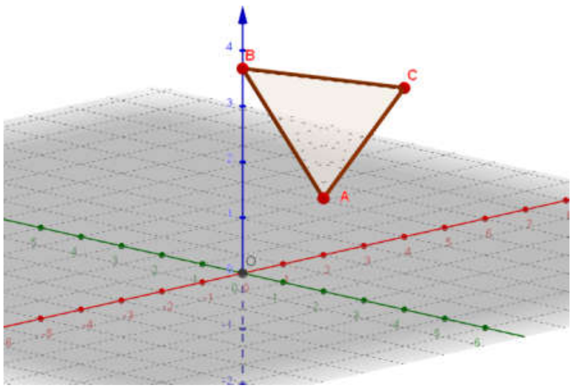

Figura 1. Problema 1.

Problema 1.
Seleccione en GeoGebra la herramienta *Medio o Centro* y de clic en el interior del triángulo ABC. ¿El punto que aparece equidista de los puntos A, B y C? Verifique gráficamente la respuesta.

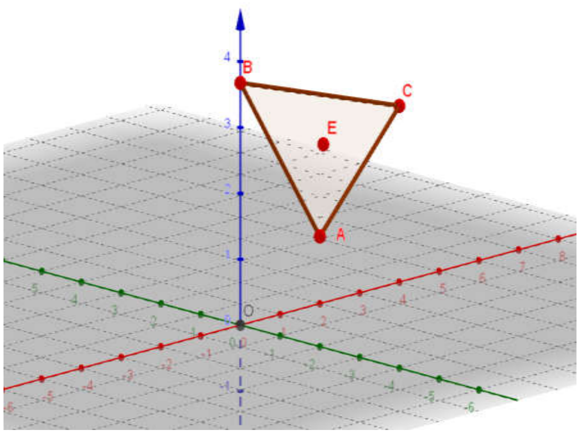

Figura 2. Problemas 2, 3 y 4

Problema 2.
E es un punto del plano que pasa por los puntos A, B y C. Dibuje la normal al triángulo ABC por el punto E. Verifique gráficamente la respuesta.

Problema 3.
Dado el triángulo ABC trace la mediatriz con respecto al lado AB. Verifique gráficamente la respuesta

Problema 4.
Encuentre por lo menos dos puntos que equidisten de A, B y C. Verifique gráficamente la respuesta

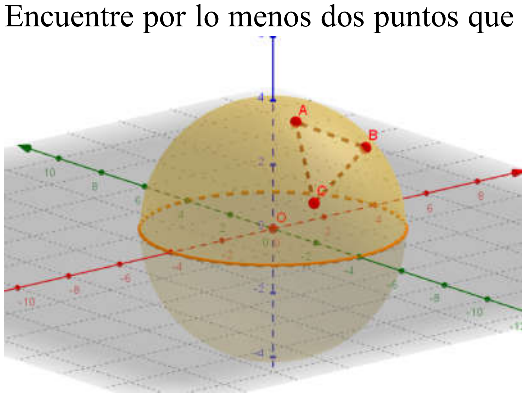

Figura 3. Problema 5

Problema 5. Ampliación y exploración

Construya un triángulo congruente con el triángulo ABC y con sus vértices en la superficie esférica. Verifique gráficamente la respuesta.

El siguiente esquema muestra el Método 1 para solucionar el problema de la superficie esférica, lo ideal es que sean los estudiantes quienes lo diseñen y sean ellos quienes exploren en busca de las herramientas y comandos, orientados por el docente

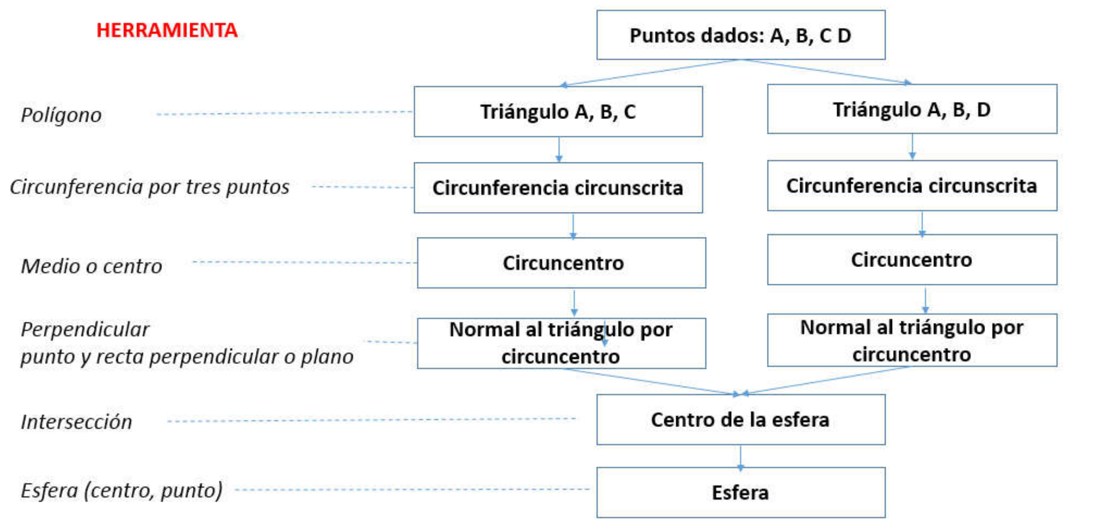


Figura 4. Procesos y herramientas en el Método 1.

Tutorial 1.
Construcción de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos. Método 1

Problema. Dibujar la esfera que pasa por los puntos
A = (0, 3, 2)   B = (1,-1,1)   C = (2, 1, 0)   D = (5,-1,1)
Solución

Para dibujar una esfera que pase por cuatro puntos se dan las siguientes restricciones:

- Ninguna terna de puntos puede ser colineal (en la misma recta)
- Los cuatro puntos no pueden estar en el mismo plano (coplanares)

Hacemos visibles la Vista Algebraica y la Vista Gr

1. Dibujamos los puntos en la Vista Gráfica 3D
2. Dibujamos la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C con la herramienta Circunferencia por tres puntos
3. Determinamos el centro de esa circunferencia con la herramienta Medio o centro
4. Trazamos la perpendicular a la circunferencia por su centro con la herramienta Perpendicular correspondiente a la Vista 3D seleccionándola y dando clic en ella y en el centro
5. Trazamos la circunferencia que pasa por los puntos B, C, y D
6. Localizamos su centro
7. Trazamos la perpendicular por su centro

8. Ubicamos la intersección de las dos perpendiculares. Ese punto es el centro de la esfera G=(3,1,4)
9. Con este centro y uno de los puntos dados dibujamos la esfera

   En el siguiente enlace se presenta el video correspondiente a este tema. En su primera parte ilustra algunas acciones preliminares para personas que no han trabajado con GeoGebra y en la segunda parte aborda la construcción de la superficie esférica.
   ***https://youtu.be/Be_uNfr2njc***

*Método 2: Construcción con aplicaciones vectoriales*

Antes de abordar el problema de la superficie esférica por cuatro puntos es conveniente proponer problemáticas como las que a continuación se formulan, que nos servirán como diagnóstico de los pre-saberes en la parte conceptual y gráfica. Posiblemente los estudiantes no encuentren las soluciones en el momento inicial pero se irán aclarando a medida que se avanza en el proceso

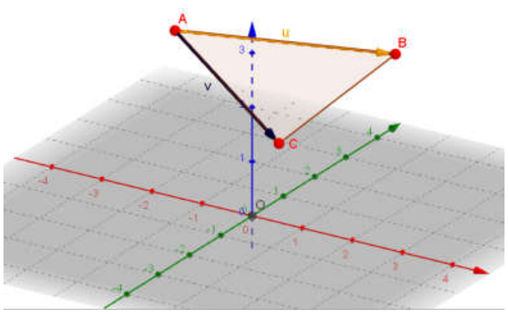

Figura 5. Problema 6, 7 y 8

Problema 6.
¿Podría anticipar en la imagen adjunta la dirección y sentido de los vectores $\vec{u}\,x\,\vec{v}$ y de $\vec{v}\,x\,\vec{u}$ ? Dibuje estos vectores con origen en A.

Problema 7.
¿Podría anticipar en la imagen adjunta la dirección y sentido de los vectores $\vec{u}\,x$¿ $\vec{u}\,x\,\vec{v}$¿ y de $\vec{v}\,x$¿ $\vec{u}\,x\,\vec{v}$¿ ? Dibuje estos vectores con origen en A.

Problema 8.
¿Cuál de los vectores anteriores podría ser vector director de la mediatriz del triángulo ABC con respecto al lado AB?

El siguiente esquema muestra el camino para solucionar el problema de la superficie esférica, lo ideal es que sean los estudiantes quienes lo diseñen y sean ellos quienes exploren en busca de las herramientas y comandos, orientados por el docente

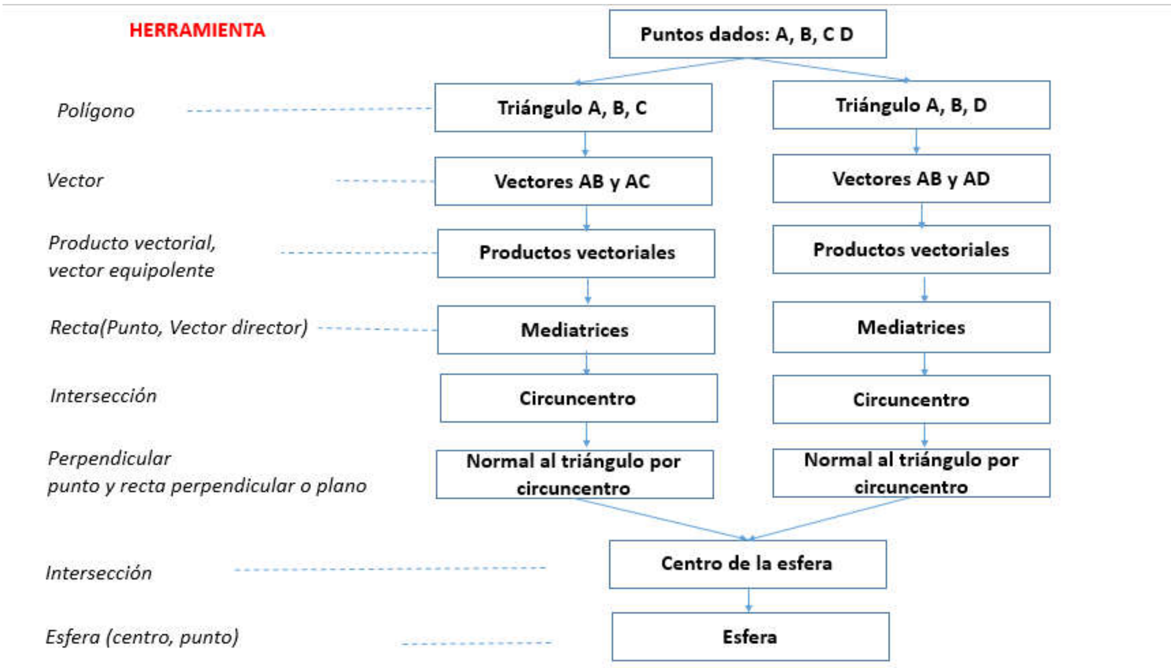


Figura 6. Procesos y herramientas en el Método 2

Tutorial 2.
Construcción de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos. Método 2

Problema: Dibujar la superficie esférica que pasa por los puntos:

A = (8, 5,1)  B = (4, 9, 2)  C = (3, 2, 2)  I = (2, 1, 0)

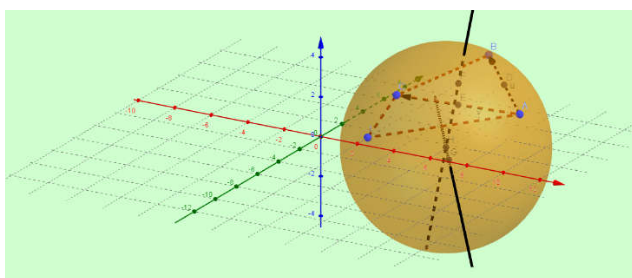

Figura 7. La superficie esférica por cuatro puntos dados.

Solución

*Primera parte: Hallamos la mediatriz con respecto al lado AB*

1. Dibujamos los puntos y construimos el triángulo ABC. Ocultamos por ahora el punto I
2. Dibujamos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
3. Hallamos $\vec{w} = \vec{u}\, x\, \vec{v}$
4. Como recurso didáctico trasladamos el vector $\vec{w}$ al punto A y lo ocultamos. Al nuevo vector lo denominamos $\vec{a}$

5. Hallamos el vector $\vec{d} = \vec{u} \times \vec{a}$
6. Trasladamos el vector $\vec{d}$ al punto A y lo ocultamos. Al nuevo vector lo denominamos $\vec{e}$
7. Localizamos el punto medio del lado AB. Lo denominamos D
8. Utilizando el punto D y el vector $\vec{e}$ trazamos la mediatriz f del lado AB.
9. Verificamos la mediatriz trazada midiendo el ángulo entre ella y el lado AB y localizando la intersección entre ella y el lado AC

*Segunda parte: Hallamos la mediatriz con respecto al lado AC*

10. Para trazar la mediatriz del lado AC replicamos el proceso pero efectuando $\vec{g} = \vec{v} \times \vec{a}$
11. Ocultamos $\vec{w}$ y $\vec{e}$ para mejor visualización
12. Trasladamos $\vec{g}$ al punto A. Lo denominamos $\vec{h}$ y ocultamos a $g$
13. Localizamos el punto medio del lado AC. Lo denominamos E
14. Utilizando el punto E y el vector $\vec{h}$ trazamos la mediatriz al lado AC. La denominamos i
15. Verificamos la mediatriz trazada midiendo el ángulo entre ella y el lado AC y localizando la intersección entre ella y el lado BC

*Tercera parte: Hallamos el circuncentro del triángulo ABC*

16. Hallamos la intersección F entre las dos mediatrices dibujadas f e i. F es el circuncentro
17. Para verificar el circuncentro trazamos
    El segmento FA que llamaremos j
    Dibujamos la perpendicular k al triángulo ABC por F
    Dibujamos la circunferencia tomando como centro F, el radio j y la dirección k
18. Trazamos la perpendicular la plano que determina el triángulo ABC y que pasa por F. La denominamos j. Sobre esta recta se encuentra el centro de la esfera

*Cuarta parte: Creamos una herramienta para hallar circuncentros*

*19.* En la parte superior de la pantalla damos clic en *Herramientas* y luego en *Crear una nueva herramienta*
    Objetos de salida: Punto F, recta J
    Objetos de Entrada: A, B, C
    Nombre del ícono: Circuncentro
    Ayuda: Toque los vértices del triángulo

*Quinta parte: Hallamos el circuncentro del triángulo ACI*

20. Hacemos visible el punto I=(2,1,0)
21. Aplicamos la herramienta Circuncentro para el triángulo ACI

*Sexta parte: Hallamos el centro de la esfera y la dibujamos*

22. Hallamos la intersección H entre las dos perpendiculares a los triángulos por sus circuncentros, en nuestro caso k e j. H Este el centro de la esfera
23. Dibujamos la esfera con centro en H que pasa por el punto A
24. Podemos crear otra herramienta para dibujar la esfera a partir de los cuatro puntos en forma automática en forma semejante a la herramienta *Circuncentro* ya construida.
    En el siguiente enlace se presenta el video correspondiente al tema
    https://youtu.be/mz1NmXsMBYI

Ejercicio de ampliación y exploración posteriores a la construcción:

Problema 9.
¿Existe un punto en la superficie del triángulo esférico ABC desde el cual los arcos a los vértices tengan igual medida? Verifique gráficamente su respuesta y justifíquela. (Si tres puntos de la superficie esférica son unidos por arcos de círculo máximo menores a 180º, la figura obtenida se denomina triángulo esférico)

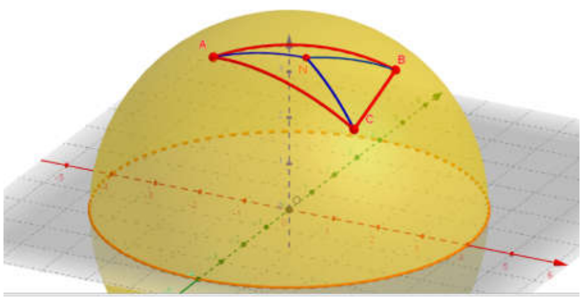


Figura 8. Problema 9.

*Método 3. Construcción con Hoja de Cálculo y Vista CAS*

Antes de abordar el problema de la superficie esférica por cuatro puntos es conveniente proponer problemáticas como las que a continuación se formulan, que nos servirán como diagnóstico de los pre-saberes en la parte conceptual y gráfica. Posiblemente los estudiantes no encuentren las soluciones en el momento inicial pero se irán precisando a medida que se avanza en el proceso

Problema 10.
Halle las soluciones al siguiente sistema de ecuaciones utilizando la matriz inversa y sin hacer uso de herramientas informáticas.

6E-F+3G+H=-46
E+4F+3G+H=-26
E-F+8G+H=-66
5E+2F+3G+H-38
Problema 11.
En forma analítica encuentre el centro y el radio de la esfera que pasa por los puntos
A = (1, 2, 4) B = (3, 1, 3) C = (3, -2, 4) D = (-1, -3, 5). El siguiente tutorial le servirá de guía en caso de ser necesario.

Figura 9. Procesos y herramientas en el Método 3

Tutorial 4.
Hallar el centro y el radio de una superficie esférica que pasa por cuatro puntos dados. Análisis matricial.

Problema: Hallar el centro y el radio de la superficie esférica que pasa por los puntos
A = (6, -1, 3) B = (1, 4, 3) C = (1, -1, 8) D = (5, 2, 3)
Solución: La ecuación de la esfera se puede escribir
$x^2+y^2+z^2+Ex+Fy+Gz+H=0$

Cada uno de los cuatro puntos dados debe cumplir la ecuación, originando el siguiente sistema lineal:
$6^2+(-1)^2+3^2+E6+F(-1)+G3+H=0$
$1^2+4^2+3^2+E1+F4+G3+H=0$
$1^2+(-1)^2+8^2+E1+F(-1)+G8+H=0$
$5^2+2^2+3^2+E5+F2+G3+H=0$

Realizados los cálculos se tendría:

$46+E6-F+3G+H=0$

$26+E+4F+3G+H=0$

$66+E-F+8G+H=0$

$38+5E+2F+3G+H=0$

La ecuación de la esfera también se puede escribir:

$C(x¿¿2+y^2+z^2)+Ex+Fy+Gz+H=0¿$ , de donde se obtiene

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2\,x\,y\,z\,1 \\ 46\,6-1\,3\,1 \\ 26\,1\,4\,3\,1 \quad = 0 \\ 66\,1-1\,8\,1 \\ 38\,5\,2\,3\,1 \end{pmatrix}$$

Tomando los menores adjuntos obtenemos

$(x¿¿2+y^2+z^2)M_{11}-xM_{12}+yM_{13}-zM_{14}+M_{15}¿=0$

$6-1\,3\,1 \quad 46-1\,3\,1 \quad 46 \quad 6 \quad 3 \quad 1$

$(x¿¿2+y^2+z^2)1\,4\,3\,1¿ \quad -x\ 26\,4\,3\,1 \quad +y\ 26 \quad 1 \quad 3 \quad 1$

$1-1\,8\,1 \quad 66-1\,8\,1 \quad 66 \quad 1 \quad 8 \quad 1$

$5\,2\,3\,1 \quad 38 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 38 \quad 5 \quad 3 \quad 1$

$46\,6-1\,1 \quad 46\,6-1\,3$

$-z\,26\,1\,4\,1 \quad +¿\ 26\,1\,4\,3$

$66\,1-1\,1 \quad 66\,1-1\,8$

$38\,5\,2\,1 \quad 38 \quad 5 \quad 2 \quad 3$

Obteniéndose

$M_{11}=-50\,M_{12}=-100\,M_{13}=-100\,M_{14}=-300\,M_{15}=700$

Por lo tanto:

$-50(x¿¿2+y^2+z^2)+100x-100y+300z+700¿=0$

Dado que la ecuación de la esfera con centro en $(x_0,y_0,z_0)$ y radio r es

¿¿

La cual se puede escribir

$(\ x^2+y^2+xz^2)-2xx_0-2yy_0-2zxz_0+¿\text{-}r^2=0$

Se infiere que:

-2$x_0$=-2 $x_0=1$

$-2y_0=2 \quad y_0=-1$

$-2z_0=-6 \quad y_0=3$

Centro de la esfera en $(1,-1,3)$

$¿-r^2=-14 \qquad r=\sqrt{25}$r=5

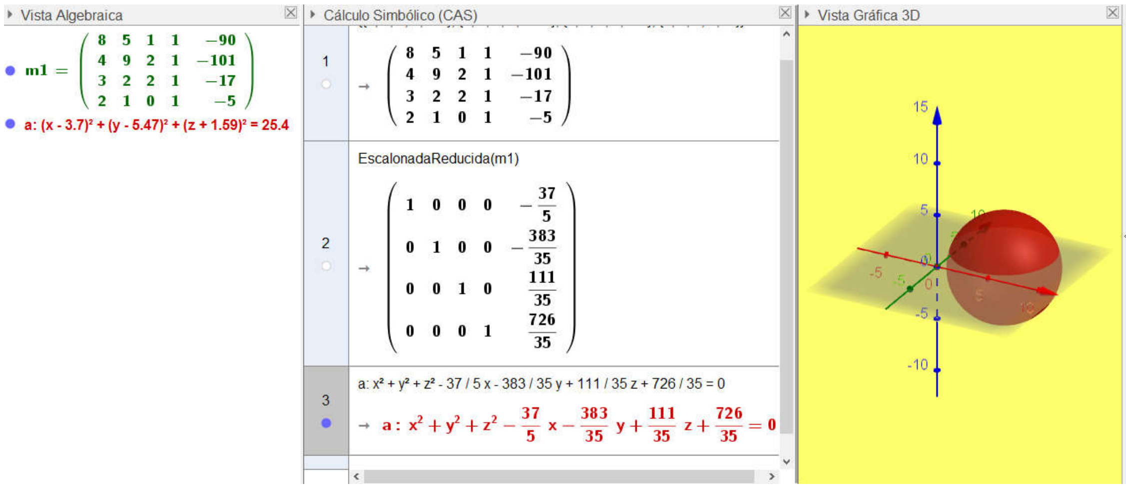


Figura 10. Método 3. Solución con CAS y Hoja de Cálculo

Tutorial 5.
Construcción de la superficie esférica que pasa por cuatro puntos. Método 3
Problema: Dibujar la superficie esférica que pasa por los puntos:

A = (8, 5,1)  B = (4, 9, 2)  C = (3, 2, 2)  D = (2, 1, 0)

Solución

La ecuación de una superficie esférica en su *forma general* es

$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0$

Contiene cuatro constantes arbitrarias independientes; por tanto, una superficie esférica queda perfectamente determinada por cuatro condiciones independientes. Así, por ejemplo, cuatro puntos no coplanares determinan una superficie esférica.

Reemplazando en la *forma general* las variables $x, y, z$ por las respectivas coordenadas del punto A, B, C y D obtenemos las ecuaciones

$8G+5H+I+K=-90$

$4G+9H+2I+K=-101$

$3G+2H+2I+K=-17$

$2G+H+0I+K=-5$

Este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial de la siguiente forma:

$X=A^{-1}.B$

Donde X es la matriz de las incógnitas A es la de los coeficientes, y B la de los términos independientes. $A^{-1}$ designa la matriz inversa de A.

Hacemos visibles la *Vista Algebraica, Cálculo Simbólico (CAS)*, y *la Hoja de Cálculo*

1. En la *Hoja de Cálculo* escribimos ordenadamente, en filas y columnas los valores numéricos de las ecuaciones
2. Seleccionamos las cuatro primeras filas y columnas y con clic derecho elegimos *Crea* y luego *Matriz*. En la *Vista Algebraica* aparece la matriz con nombre m1. Esta es la matriz A.
3. Seleccionamos los elementos de la quinta columna y con clic derecho elegimos *Crea* y luego *Matriz*. En la *Vista Algebraica* aparece la matriz con nombre m2. Esta es matriz B
4. En la Entrada escribimos Inversa (m1) y damos Enter. Aparece la matriz m3. Esta es la inversa de A
5. En Entrada escribimos m3*m2. En la Vista algebraica aparece m4 la cual nos presenta los valores de G, H, I y K en forma vertical
   Otra forma:
6. Seleccionamos todos los datos en la Hoja de Cálculo y con clic derecho elegimos *Crea* y luego *Matriz*. En la *Vista Algebraica* aparece la matriz con nombre m1
7. En la *Barra de Entrada* escribimos EscalonadaReducida (m1). En la Vista Algebraica aparece la matriz m2 que nos da los valores G= -7.4 H= -10.94 I=3.17 k= -20.74
   Observación:
8. La matriz m1 se puede arrastrar con clic sostenido a la primera fila de la Vista Cálculo Simbólico y luego en la segunda fila escribir EscalonadaReducida (m1). La Hoja de Cálculo nos da los valores en forma fraccionaria.
9. Reemplazando en la tercera fila de la Vista Cálculo Simbólico estos valores en la forma general obtenemos la ecuación de la esfera que pasa por los cuatro puntos dados:

$$x^2+y^2+z^2-\left(\frac{37}{5}\right)x-\left(\frac{383}{35}\right)y+\left(\frac{111}{35}\right)z+\left(\frac{726}{35}\right)=0$$

10. En la Vista Algebraica aparece esta ecuación en la forma

$$(x-3.7)^2+(y-5.47)^2+(z+1.59)^2=25.4$$

11. De donde se deduce que el centro es el punto (3.7, 5.47, -1.59) y el radio $\sqrt{25.4}$
    En el siguiente enlace se presenta el video correspondiente al tema
    https://youtu.be/S130e87Xl8g

Ejercicio de ampliación y exploración posteriores a la construcción:

Problema 11. Explore la Vista CAS en busca de otros comandos alternativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias Bibliográficas

Acosta, et al. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. *Serie Documentos*, Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia.

Chevallard, Y. y Bosch, M. y Gascon, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de Educación $N_o$ 22. Barcelona: Horsori Editorial.

DUVAL, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Cali. Valle. 314 P.

MEN (2002). Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie memorias, Bogotá, Colombia.

MEN (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Serie Lineamientos Curriculares. Punto exe editores. Bogotá D.C., Colombia.

MEN (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales. Serie Lineamientos. República de Colombia. 1998

MEN (2003). Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Enlace editores. Bogotá D.C., Colombia.

MORENO, L. (2002) Cognición y computación, el caso de la geometría y la visualización. Memorias del Seminario Nacional de formación de Docentes: Uso de nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional.

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. Educación Matemática, 15 (3), 275-300.

Moreno, L**.** (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología. Avance y Perspectiva*, vol. 20, pp. 65-68.

Duval, R. (1999): Representación, visión y visualización: funciones cognitivas en el pensamiento matemático. Temas básicos para el aprendizaje. En: Actas de la vigésimo primera reunión anual del Capítulo norteamericano del grupo internacional para la psicología de la educación matemática. pag. 3 - 26

Acosta Gempeler, M. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. *Tecné Episteme Y Didaxis TED*, (28). https://doi.org/10.17227/ted.num28-1074