# RELEXÕES SEMIÓTICAS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

*Jayme do Carmo Macedo Leme*
*Sonia Barbosa Camargo Igliori*
***Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Brasil***

jayme.puc@gmail.com
sigliori@pucsp.br

Essa pesquisa visa levantar reflexões sobre algunas questões relativas às representações semióticas de números racionais. Tais questões são levantadas em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil e podem ser analisadas por meio da Teoria de Raymond Duval. A diversidade de registros é resultante da história da evolução de conceitos para a necessidade da resolução dos problemas. Serão tratadas discussões sobre os diferentes registros de números racionais e suas interrelações. Esse estudo resulta em atividades que podem contribuir para uma compreensão adequada sobre diferentes registros de número racional.

**Palabras Clave**: número racional, registro de representação semiótica.

## INTRODUCCIÓN

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Brasil (1998)

> o conhecimento sobre os números deve ser construído e assimilado pelo aluno, tanto num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, mas também como objetos de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas interrelações e o modo como historicamente foram constituídos. (p.50 -51)

É essa a perspectiva deste tema tratar o número como objeto de estudo, levando-se em conta as questões relativas às representações semióticas desse conceito. Para isso são apresentadas, inicialmente, informações da teoria de Raymond Duval sobre a representação semiótica[1] de conceitos matemáticos e o papel que elas desempenham na aprendizagem da Matemática.

Essa teoria toma por referência o fato de que os conceitos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações semióticas e são representados por vários registros, ou seja, além de um conceito matemático não poder ser colhido num jardim, não ter cheiro e nem cor que o identifique, no espelho ele se reflete em várias imagens.

A diversidade de registros é resultante da história dos conceitos que foi indicando sua necessidade para a resolução dos problemas. Para a aprendizagem a existência de vários registros para um mesmo conceito e a ausência de congruência entre esses registros são entraves que devem ser levados em conta no ensino. Utilizar os resultados da teoria de representação de Duval para o ensino significa ter em mente que, aprender matemática é por um lado efetuar tratamentos no interior de um mesmo registro (efetuar operações, resolver equações, etc), mas, também, transitar de um registro a outro. Para Duval a aprendizagem de um conceito ocorre quando o aluno é capaz de destingui-lo de seus representantes. Agora, há de se concordar que isso não é fácil, dada a abstração dos conceitos matemáticos. Pode-se perguntar o seguinte: o que há de comum entre as representações simbólicas $\frac{1}{2}$ e 0,5? Não é nada trivial a resposta a essa questão e, portanto muito menos

[1] Segundo Santaella (1999) Semiótica uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido.

trabalhar com elas e ainda conceber os diversos significados da noção de um meio (parte/todo, razão, operador, quociente).

## MARCO TEÓRICO

As representações semióticas dos conceitos matemáticos podem ser classificadas em **simbólica**, **figural** (gráficas) ou **língua natural**. E é somente por meio dessas representações que elas tem vida.

O número dois, por exemplo, é representado na língua portuguesa pela palavra "*dois*", na representação simbólica pelos símbolos *2*, ou *II*, $\frac{10}{5}$, entre outros, e na representação figural por um desenho constando dois objetos quaisquer.

O número meio é representado pelos símbolos $\frac{1}{2}$, $0{,}5$; por uma barra de chocolate dividida em duas partes iguais e considerada uma delas, pela reta graduada indicando-se duas unidades, a partir de um ponto zero de referência, ou no caso da representação em linha natural, em português, pela palavra "*meio*".

O número irracional raiz de dois pode ser representado graficamente (na representação figural) pela diagonal do quadrado de lado com medida 1 unidade, pelo símbolo $\sqrt{2}$ . E, no registro da língua natural portuguesa, pelas palavras "*raiz quadrada de dois*".

No ensino de um conceito matemático há em geral a predominância do uso de uma das representações. Não são comuns investimentos em atividades direcionadas às mudanças de registros (em ambos os sentidos). Parece mesmo haver uma concepção de que a passagem de um registro a outro é uma ação que o aluno adquire naturalmente, o que de fato não ocorre. É necessário levar o aluno a compreender que um conceito em dois registros diferentes não são dois conceitos diferentes.

## EXPOSICIÓN DE LA PROPUESTA

1. **Da teoria à prática: propostas de atividades.**

A atividade que segue exemplifica esses fatos. Ela foi proposta a alunos da 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola de São Paulo (Brasil), os quais já haviam estudado operações com números racionais nas representações decimais e fracionarias:

1) Calcular $(0,5)^2$,
2) Calcular $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ;
3) Indicar qual das alternativas é a correta:

    a) $(0,5)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

    b) $(0,5)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

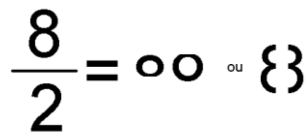
    c) $(0,5)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Em torno de 40% dos alunos não identificaram o número um quarto nas duas representações mesmo tendo acertado o cálculo das potências. Para o pesquisador que aplicou a questão isso parecia indicar que esses alunos não realizavam com facilidade a conversão do registro decimal para fracionário ou vice-versa.

Deste modo, atividades que visem a identificação de números em registros diferentes devem ser propostas.

É frequente encontrar situações que, por deslize ou por simplificação são tratadas de forma indistinta as duas coisas: número (objeto) e registro de representação (representante). É o caso, por exemplo, de enunciados como: acrescentando-se ou suprimindo-se zeros à direita da parte decimal de um número esse número não se altera. Quando se diz "parte decimal de um número" na realidade é a parte decimal do representante do número, e quando se diz "número não se altera" aí sim se trata do próprio objeto número, ou seja, do representado. É preciso apenas estar atento que a distinção é necessária para a aprendizagem.

Essa distinção entre o objeto e sua representação foi muito reforçada no ensino da Matemática no tempo da Matemática Moderna chegando mesmo a exageros. Pode-se citar como exemplo o caso de se indicar que o resultado da divisão de 8 por 2 resulta em dois zeros ou dois três. Estava-se nesse caso referindo-se à divisão do símbolo 8 (à época denominado numeral do número 8) em duas partes: horizontal (resultando em dois zeros) ou verticalmente (resultando em dois três), como no desenho que segue.




No âmbito da teoria de Duval a necessidade de se distinguir representado de representante está longe de ser anedótica (como no exemplo citado), e tem sustentação em princípios relacionados a uma teoria cognitiva segundo a qual o *aprendiz terá acesso a um conteúdo matemático quando ele não mais o confundir com suas representações*.

Há ainda que se considerar nessa teoria a necessidade de se fazer coordenação entre diferentes registros e mudança de um registro a outro, mudança essa denominada por Duval de conversão de registros. A conversão tem sempre dois sentidos considerando-se um registro de partida e outro de chegada. As dificuldades para realizar uma conversão são maiores ou menores dependendo do sentido. Passar do registro fracionário para o decimal é em geral mais fácil que no caso contrário.

A coordenação de representações num mesmo registro é denominada tratamento. Exemplo: identificar $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

As atividades de conversões de registros não devem ser atividades de conhecimento de regras apenas, pois ele não garante, em geral, a identificação de um objeto em representações distintas. Segue alguns exemplos:

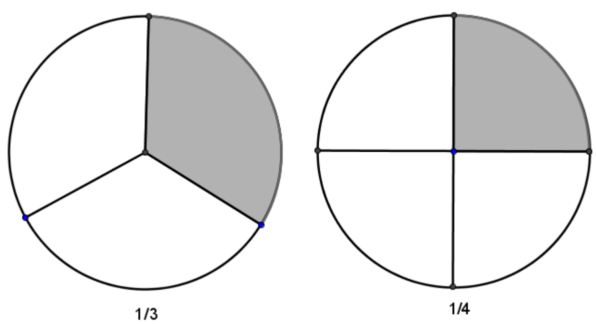
Um aluno faz corretamente a conversão de $\frac{1}{2}$ para 0,5, ou seja, ele faz a operação 1 dividido por 2. Mas, solicitado a estabelecer relação entre eles não considera a igualdade e, portanto, não considera as duas representações distintas como representações de um mesmo número.

Num outro caso um aluno efetiva a operação $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ da seguinte forma:

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = (1{,}5)^{-2} = \frac{1}{(1{,}5)^2} = \frac{1}{2{,}25}$. Ele realiza corretamente os tratamentos e conversões de registros, mas há indicações que ele fica no domínio das representações, ou das regras. (CATTO, 1999):

Duval chama a atenção para um fato importante na aprendizagem, que coordenar registros não é uma ação espontânea e que há necessidade, no ensino, de se colocar o aprendiz em diversas situações em que seja necessária a coordenação de registros. Diz ele que o fenômeno da não congruência dificulta, de forma significativa, a realização de conversão de registros. Isto é, quando a representação de chegada não transparece na representação de partida, como numa situação de simples codificação. Exemplos: na conversão de $\frac{25}{100}$ para 0,25 há congruência, porém na de $\frac{25}{100}$ para $\frac{1}{4}$ não, e por essa razão traz mais dificuldade ao aluno.

Há ainda experiência de alunos que se utilizam do registro figural (pizza, torta, ou barra de chocolate) para comparar dois números na representação fracionária. É o exemplo de comparar $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$. Nesse caso a congruência entre os dois registros (figural e fracionário) facilita a conversão, e a comparação dos números no registro gráfico é mais evidente, por ser visual.

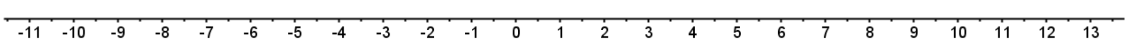


## 2. O uso da reta graduada como um registro de representação dos números racionais.

Segundo os PCN (1998) há necessidade da:

> Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações (p.71).

Na França os pesquisadores Adjiage e Pluvinage (2000) fundamentados na teoria de Duval propõem o uso da reta graduada como registro de representação dos racionais.




A proposta deles é ir mais além do que é usualmente feito atribuindo à ela apenas o papel de ilustração. A ideia foi ampliar as possibilidades de registros de representação dos racionais demonstrando que a reta numerada pode assumir as funções de registro de representação e, portanto desempenhar um papel conceitual. Os autores partem da premissa que a representação gráfica é bastante eficiente por ser visual, mas que nesse tipo de representação, a da reta numerada, desempenha um papel mais conceitual que a representação das tortas (também útil) que desempenha um papel físico.

Pode-se ver na Figura A um exemplo dessa potencialidade da reta numerada, os dois segmentos graduados têm tamanhos diferentes e representam o mesmo número. A igualdade está nas ações de constituição do próprio sistema da reta graduada, no caso dividir por 4 e considerar 3 das subdivisões.

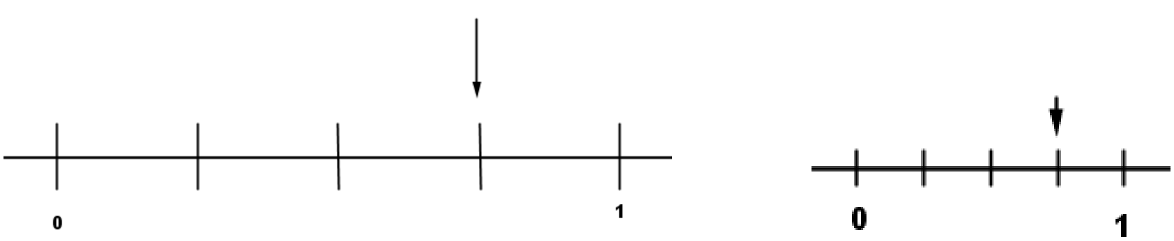



**Figura A**

Um círculo e um segmento numerado como na Figura B foram apresentados

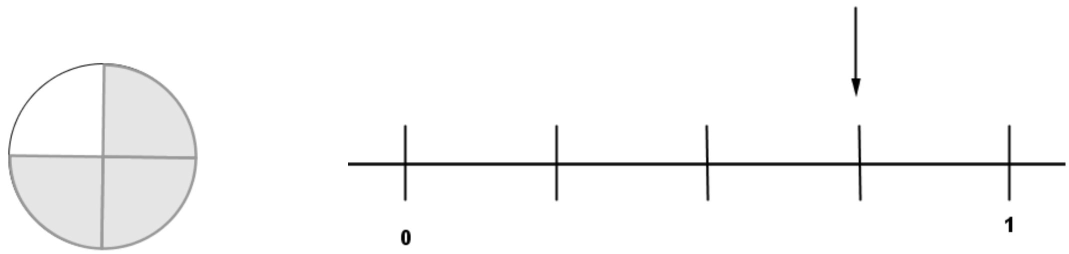



**Figura B**

a um aluno e dada a seguinte instrução: conte!. A reação do aluno foi passar a contar: 1, 2, 3, ...e 4, olhando o circulo. E, frente ao segmento graduado, ele reagiu perguntando: contar o que?

No caso do círculo a divisão em quatro partes e as três partes coloridas fazem surgir os números 3 e 4 que vão compor o número racional $\frac{3}{4}$. No caso do segmento isso não ocorre, pois a numeração está subjacente, e é menos congruente ao desenho. Essa distanciação entre o desenho e a numeração introduz ao mesmo tempo a riqueza e as dificuldades do dispositivo da reta numerada. (ADJIAGE e PLUVINAGE, 2000, p.46)

### 3. Propostas de Atividades

A seguir estão indicadas atividades utilizando as representações figurais dos números racionais com vistas ao conhecimento de funções que os racionais desempenham. As figuras das atividades forma adaptadas de (ADJIAGE e PLUVINAGE 2000).

Sugere-se que as atividades sejam realizadas em duplas de alunos e que as soluções apresentadas por eles sejam discutidas com a sala toda. Sugere-se também que a discussão com a sala toda seja feita, dispondo-se de figuras compatíveis que podem ser projetadas numa tela, ou desenhadas na lousa.  O importante é levar os alunos à compreensão do que é essencial em cada atividade.

**3.1. Atividade 1.** Considerar a Figura 1 abaixo

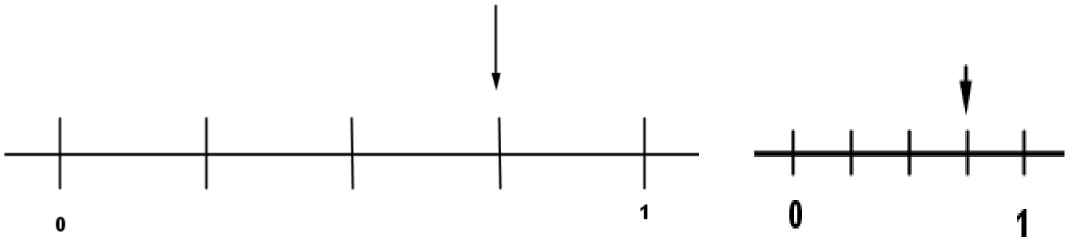



**Figura 1**

a) Qual é o número que está representado no segmento colocado à direita?
b) E o número que está indicado no segmento da esquerda?
c) Qual é a relação entre esses dois números?
d) Comente sua reposta para o item c.

Nessa atividade o essencial é fazer o aluno compreender que número e medida não são a mesma coisa, e que nesse caso o número racional significa considerar 3 das subdivisões em 4 partes iguais da unidade.

**3.2. Atividade 2.** O número $\frac{4}{5}$ foi posicionado por um aluno conforme apresentado na Figura 2 abaixo.

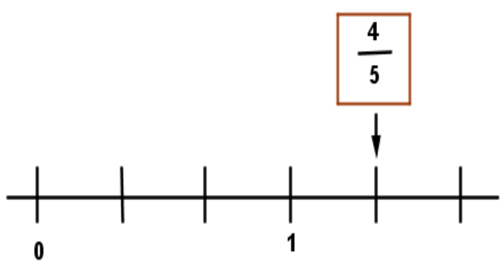



**Figura 2**

Esse posicionamento está correto? Explicar sua reposta.

**3.3. Atividade 3:** Considerar na Figura 3 abaixo dois círculos divididos em partes iguais e sombreadas algumas delas.

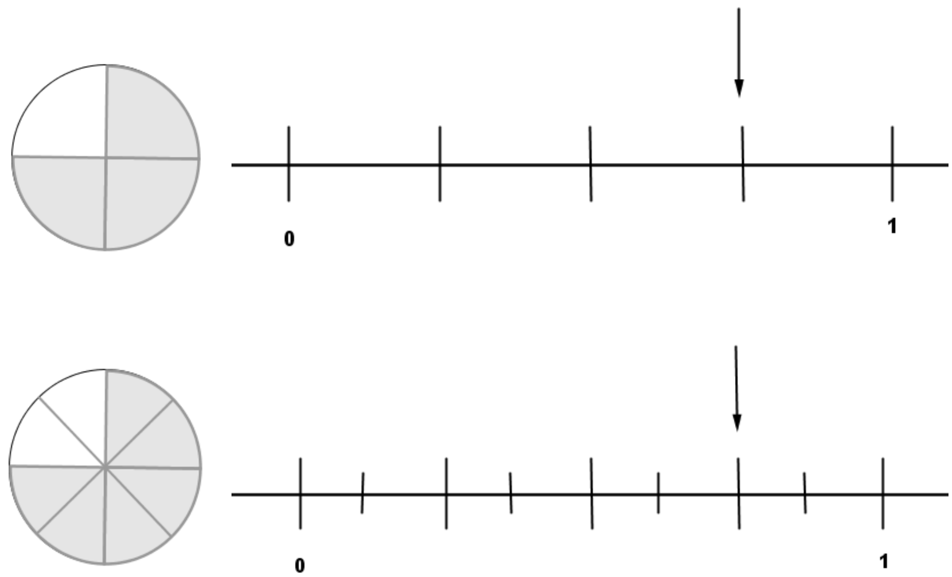



**Figura 3**

Pergunta-se:

a) Que número as partes pintadas do círculo mais ao alto da Figura 3 representa?
b) E as partes pintadas do círculo de baixo?

Considerar agora os dois segmentos numerados e responder:

a) Que número representa a posição indicada pela flecha no segmento mais ao alto?
b) E no segmento de baixo?
c) Que relação há entre os dois números encontrados nos itens a e b?

**3.4. Atividade 4.** Na Figura 4 os números $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{5}$ foram posicionados na reta graduada por três alunos nomeados por A, B e C. Os números pintados de cor cinza foram posicionados pelo aluno A. Os números de cor cinza mais escuro pelo aluno B. O número $\frac{3}{5}$ que está sem cor foi posicionado pelo aluno C.

a) Avaliar a resposta de cada aluno, dizendo se o posicionamento está correto ou não, e tentar explicar que raciocínio o aluno fez para os posicionamentos.

b) Indicar onde você acha que o aluno C teria posicionado $\frac{9}{5}$.

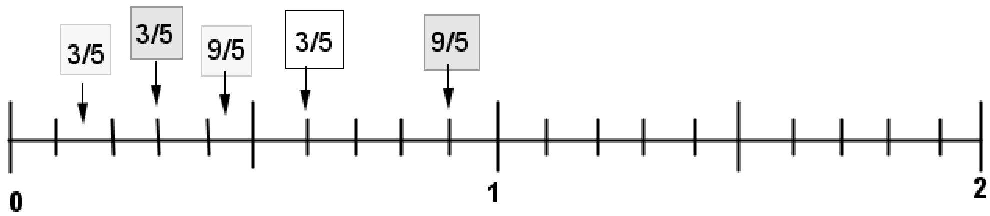



**Figura 4**

**3.5. Atividade 5.** Considerar a Figura 5 abaixo.

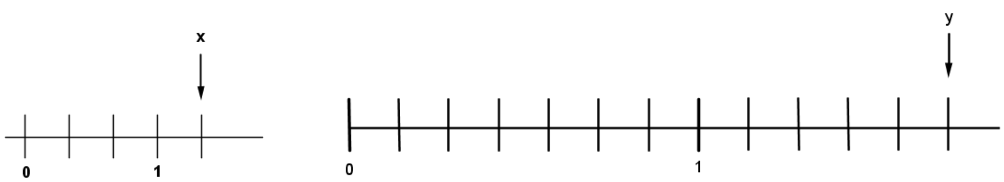



**Figura 5**

a) O número x é maior ou menor que 1?
b) E o número y?
c) O número x é maior ou menor que 2?
d) E o número y?
e) O número x é maior ou menor que y?

**3.6. Atividade 6.** Considerar a figura 6 abaixo.

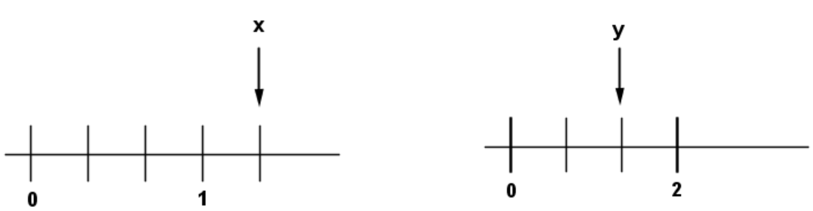



**Figura 6**

a) Qual é o número que x representa?

b) E o número y?

c) x é maior, menor ou igual a y?

## RESULTADOS

Esta discussão tem por pressuposto levantar reflexões sobre os diferentes registros semióticos dos número racionais, munindo docentes com atividades que levem os alunos a vivenciar situações que os faça a refletir sobre esses diferentes registros.

## REFERENCIAS


Adijiage, Robert e Pluvinage, François (2000). Une registre géommétrique unidimensionnel pour l´expression des rationnels. Recherches em didactique des mathématiques. *La Pensée Sauvages*. Volume 20/01. (p. 41-87). França.

Catto, Glória Garrido (1999). Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos. *Dissertação de Mestrado, PUC/SP. Disponível em* *http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/gloria_catto.pdf*. Brasil

Abar, Celina A. A. P. e Igliori, Sonia B. C. (2012). A reflexão e a prática no ensino. *São Paulo. Blucher.* São Paulo - Brasil

Machado, Silvia Dias Alcântara (2010). Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica. *Papirus. 5ª edição.* Brasil

Santaella, L. (1999). O que é Semiótica, *São Paulo: Brasiliense*. Brasil.

Silva (1999). Marcelo Cordeiro da. Reta graduada: Um registro de representação dos números racionais. *Dissertação de Mestrado, PUC/SP. Disponível em* *http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/marcelo_cordeiro_silva.pdf*. Brasil.