USO de CAS
ASPECTOS ALGEBRAICOS

Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión, usando el comando SUSTITUCION **.**

(A) La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de *x*.

Usando los valores dados de *x* (i.e., 1/3, –5, 2, 3.3), calcula los valores que resultan en cada una de las expresiones, usando la herramienta de sustitución  de Geoegebra.

<u>Importante:</u> completa una fila de la tabla y así hasta que la termines.

Registra tus elecciones adicionales de los valores de *x*, y anótalos en la fila de arriba de la tabla; escribe los resultados apropiados en las celdas de abajo.

Para x =	1/3	-5	2	3.3
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$				

(B) Compara los resultados obtenidos en las diversas expresiones de la tabla precedente. Registra, en el rectángulo siguiente, todo aquello que observas y escribe cuales crees que son funciones equivalentes

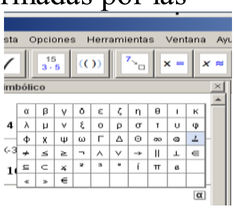
Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión, usando el comando DESARROLLO 

La columna del lado izquierdo de la tabla de abajo contiene las expresiones de la lección previa. Usando tu CAS, completa la columna del lado derecho de la tabla con las expresiones obtenidas al usar el comando DESARROLLO .

Sintaxis: Desarrollo(*expresión*)

Expresión dada	Resultado producido por DESARROLLO
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	

Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando una prueba de la igualdad

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada expresiones formadas por las expresiones 3 y 5 y colocas el símbolo de igualdad booleana 

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) \overset{?}{=} \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

1. ¿Qué muestra el CAS como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

3. Qué pasa si en la expresión del lado derecho de la ecuación anterior sustituyes x por -2. Interpreta el resultado mostrado por el CAS.

1). $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5$;

2). $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$

4. Consideras que las expresiones 1 y 2 son iguales? Justifica tu respuesta

B) He aquí un nuevo conjunto de expresiones:

Expresiones dadas
1. $4(x-1)^2-(x+1)^2$
2. $(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$
3. $(x-3)(3x-1)$

4. $\dfrac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$

(A) Usa tu CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS que prefieras. Muestra todo tu trabajo con CAS en la tabla de abajo:

Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS

Exploración e interpretación de los efectos de la tecla ENTER, así como de los comandos DESARROLLO y FACTORIZA

(A) **(con CAS)** Completa la tabla de abajo con lo mostrado por el CAS, según sea requerido:

Expresión dada	Resultado producido por ENTER	Resultado producido por FACTORIZA	Resultado producido por DESARROLLO
1. $\dfrac{6x^2-5x-4}{6}$			
2. $\dfrac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$			
3. $(2-x)(1-2x)$			
4. $\dfrac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$			

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

Expresión dada
1. $\dfrac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
2. $\dfrac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
3. $6x^2-21x+9$
4. $\dfrac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

(A) Determina el máximo conjunto común de valores posibles de x de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

(B) Usando, una vez y sólo una vez, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que todas las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. En la Tabla 2, establece qué es lo que introduces en la CAS y qué es lo que obtienes. (Puedes usar la hoja de trabajo dada en la última página para conservar los registros de tu trabajo.)

Tabla 1

Expresión dada
Exp1. $\dfrac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
Exp2. $\dfrac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
Exp3. $6x^2-21x+9$
Exp4. $\dfrac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

Tabla 2

Método de CAS	**Qué introduces en la CAS**	**Resultado mostrado por la CAS**
Verificación de la igualdad		
FACTORIZA		
DESARROLLO		
ENTER		
IGUALDAD		

BOOLEANA		

Transición de expresiones a Ecuaciones

Parte I (con CAS): Introducción al uso del comando RESUELVE

En la primera actividad, en torno a la equivalencia de expresiones, anulamos aquellas expresiones encontradas que no eran equivalentes (un recordatorio de la definición de equivalencia: "si para cualquier número posible que reemplaza a x, cada una de las expresiones dan el mismo valor, se dice que esas expresiones son equivalentes en el conjunto de valores posibles que puede tomar x.").

Con esas expresiones no equivalentes, cuando las introducíamos en la CAS, las ecuaciones formadas con tales expresiones, la CAS no mostraba "true". Esto fue así porque hay sólo *algunos* (o *ninguno*) valores de x, los cuales al sustituirlos en ambos lados de la ecuación produce resultados iguales. En la presente actividad se usará la CAS para encontrar los valores de x que producen resultados iguales.

He aquí un ejemplo de dos expresiones claramente no equivalentes: x^2 y x.

Si se introduce una ecuación formada por estas dos expresiones ($x^2 = x$), y si se quiere encontrar esos valores de x para los cuales las dos expresiones producen valores iguales, se puede usar el comando RESUELVE de la CAS.
Syntax: RESUELVE (Expr1 = Expr2, x), suponiendo que x es el nombre de la variable que aparece en cada expresión, y que Expr1 y Expr2 representan las expresiones dadas.

Resuelve la ecuación $x^2 = x$ usando el comando RESUELVE de CAS.

1. ¿Qué muestra la CAS como resultado?

2. ¿Puedes anticipar lo que mostraría el CAS cuando sustituyas cada uno de estos valores de x en la ecuación?

3. Usando CAS verifica, aquello que se esperaba en la Pregunta 2.

Terminología: Los valores de x para los cuales ambas expresiones producen resultados iguales son, comúnmente, conocidos como "soluciones" de la ecuación.

Parte II (con CAS):

Expresiones ya abordadas y su subsecuente integración en ecuaciones

He aquí tres expresiones:

1. $x(x^2 - 9)$,
2. $(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$
3. $(x^2 - 3x)(x+3)$

(A) Usa GEOGEBRA para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS	Mi interpretación de lo que muestra la CAS

Parte IV (con CAS): Síntesis de varias ecuaciones tipo

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando RESUELVE de la CAS.

Ecuación dada	Qué muestra la CAS
1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$	
2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2-8x-40$	
3. $3x^2-x-1 = 2x+5$	
4. $-3x+7=\frac{-6x+3}{3}-x+7$	

Racionalización del denominador de una expresión

Objetivo: Ser capaz de racionalizar un denominador y de simplificar expresiones, usando la multiplicación de formas conjugadas.

Parte I: Actividad con calculadora así como con papel y lápiz

a-i) Introduce en tu calculadora la expresión $\frac{2}{\sqrt{7}}$ .y presiona ENTER ¿qué observas?

Parte I. b) En la siguiente actividad se continúa con el trabajo en torno a la racionalización de denominadores de expresiones. **Completa, en la tabla siguiente, una fila a la vez**; procede de arriba hacia abajo:

Expresión	Introduce en tu CAS cada una de las expresiones dadas y escribe el resultado mostrado.	Trabajo con papel y lápiz que transforma la expresión original en la forma producida por el CAS.
$\frac{7}{\sqrt{5}}$		
$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$		
$\frac{1}{\sqrt{7}+2}$		
$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$		
$\frac{1}{3\sqrt{7}-5}$		
$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$		
$\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$		

Un desafío (papel y lápiz)

Se desea usar una estrategia similar a la empleada hasta esta parte para racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

III a) Introduce en tu calculadora la expresión $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, presiona ENTER y escribe, en la parte de abajo, el resultado obtenido. ¿Qué observas?

III b) ¿Qué cálculos simbólicos, con papel y lápiz, debes usar para racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$?

Suma y diferencia de cubos de la forma factorizada a la forma expandida

Las siguientes formas factorizadas son diferentes de aquellas que ya se han abordado. Usa el comando EXPAND de tu calculadora para investigar si los resultados obtenidos, al efectuar la multiplicación indicada por los factores, presentan alguna regularidad.

Forma factorizada	Forma expandida mostrada por el CAS
1. $(x+2)(x^2-2x+4)$	
2. $(x-3)(x^2+3x+9)$	
3. $(x+7)(x^2-7x+49)$	
4. $(x+\sqrt{11})(x^2-\sqrt{11}x+11)$	
5. $(x-\frac{2}{3})(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9})$	

(A) Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

Expresión dada	Factoriza	Explica
1. $8u^3 - v^3$		
2. $27w^3 + 8z^3$		
3. $(u+2)^3 - (u-2)^3$		